1 Tutustumista Mathematicaan

Harjoituksissa käytetään Mathematicaa, joka on symbolinen laskentaohjelmisto. Se käynnistetään ATK-keskuksen koneissa komennoilla:

```
use mathematica
mathematica &
```

Jos käytössä ei ole X-päätettä, voi Mathematicaa ajaa tekstipäätteeltäkin, tosin askeettisemmalla käyttöliitynnällä. Tällöin jälkimmäisen komennon sijaan annetaan komento `fep math`.

Graafisessa käyttöliitynnässä työskennellään ns. notebookien kanssa. Notebookit ovat dokumenteja, joita voi editoida, tallettaa ja tulostaa. Varsinaisen laskennan hoitaa Mathematican ydin, ja käskeäksesi ydintä laskemaan juuri kirjoitetun (tai hiirellä valitun) lausekkeen täytyy näppäillä shift+enter, sillä pelkkä enter aiheuttaa vain rivinvaihdon. (Tekstipohjaisessa käyttöliittymässä yksinkertaisesti kirjoitetaan rivi kerrallaan lausekkeita, jotka ydin laskee ja tulostaa.)

- Kaarisulkuja `( )` käytetään ryhmittelyyn eli laskujärjestyksen osoittamiseen, esim. `2 - (4 + 3)`.
- Hakasulkuihin `[ ]` kirjoitetaan funktioiden argumentit, esim. `Sin[Pi]`. Tyypillinen aloittelijan virhe on yrittää käyttää aaltosulkuja funktion argumentissa, mutta tämä johtaa lausekkeen tulkitsemiseen kertolaskuksi funktiokutsun sijaan. Syntaktisesti oikea mutta merkitykseltään järjetön lauseke johtaa sitten usein hämmentäviin virheilmoituksiin.

  Kaksinkertaisia hakasulkuja `[[ ]]` käytetään indeksointiin (esim. matriisin alkioiden poimimiseen).
- Aaltosulkuja `{ }` käytetään listojen muodostamiseen. Listoja käytetään monenlaisissa yhteyksissä. Erityisesti vektoreille ja matriiseille ei Mathematicassa ole erityisiä tietorakenteita, vaan ne esitetään listoina.

Desimaaliluvuissa käytetään amerikkalaiseen tapaan pistettä. Pilkkua käytetään siten vain erottimena esim. funktion argumenteissa. Pitkän lausekkeen voi jakaa useammalle riville laittamalla rivinvaihdon eteen kenoviivan `\`. Toisaalta jos lausekkeen keskeneräisyys on riittävän ilmeistä (esim. sulut ovat epätasapainossa), odottaa Mathematica joka tapauksessa sen jatkuvan seuraavalla rivillä.

Mathematican tarjoamat valmiit funktiot alkavat aina isolla kirjaimella, ja yhdyssanoissa jokainen sana alkaa isolla kirjaimella. Ohjemisto erottaa isot ja pienet kirjaimet toisistaan, joten esim. `Sin` on sinifunktio, mutta `sin` on määrittelemätön symboli, jollei käyttäjä ole sille jotain arvoa antanut. Peruslaskutoimituksia merkitään muuten useimpien ohjelmointikielten tapaan merkeillä `*/+-`, mutta kertomerkin `*` voi korvata pelkällä välilyönnillä.

Mathematicassa on varsin käyttökelpoinen opastustoiminto. Esimerkiksi komennolla `?Plot` saat tietoa `Plot`-komennon käytöstä. Kokeile myös seuraavia:

```
??Plot
??*Plot*
?P*
?P@
```

Graafisessa käyttöliittymässä on lisäksi opasteita käyttöliittymästä ja myös toisinaan näppärä Mathematican funktioiden kuvauksien selain.

Mathematicasta poistutaan graafista käyttöliityntää käytettäessä valitsemalla valikosta File/Quit. Tekstipohjaista käyttäjäliityntää käytettäessä pois pääsee komennolla `Quit`.

Aikaisemmin laskettuihin lausekkeisiin voi viitata funktioilla `In` (syötetty lauseke) sekä `Out` (laskettu lopputulos), kuten kehotteistakin voi arvata. `Out`ia käytetään yleensä varsin paljon, niinpä sen voi lyhentää pelkällä prosentinmerkillä (ks. `?Out`).

Symboleille voi antaa arvoja sijoituslausekkeella. Kokeile seuraavaa:

```
x=3
y=8
x + y + z
?@
```

Mathematica ei erityisesti erottele käyttäjän määrittelemiä symboleita valmiiksi määritellyistä, mutta aloittamalla omat muuttujansa[1] pienellä kirjaimella pysyy helpommin selvillä niiden alkuperästä.

Yhtälöissä ja testeissä käytetään kaksinkertaista yhtäsuuruusmerkkiä `==`, sillä yksinäinen `=` merkitsee aina sijoitusta.

Symbolin `x` arvon voi poistaa lausekkeella `x=.`. Poista edellä määrittelemiesi muuttujien arvot.

[1] Muuttujaksi kutsumme tässä sellaista symbolia, jolle on annettu arvo.

2 Raja-arvot, derivaatta

Raja-arvoja lasketaan funktiolla `Limit`. Kokeile näihin:

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

(Potenssiinkorotusta merkitään `^`:llä, neliöjuuri on `Sqrt`.) (c)-kohdan tulos saattaa vaikuttaa hieman oudolta — palaamme siihen tuonnempana.

Derivaattoja lasketaan funktiolla `D`. Laske seuraavien funktioiden kolme ensimmäistä derivaattaa ja koeta myös sieventää lopputulosta funktiolla `Simplify`:

$$\text{(d)}\quad f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \qquad \text{(e)}\quad f(x)=\sqrt{\cos x} \qquad \text{(f)}\quad f(x)=\tan x.$$

3 Lineaarialgebraa

Vektoreille ei Mathematicassa ole erityistä tietorakennetta, vaan ne esitetään listoina. Niinpä vektori $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ kirjoitetaan muodossa `{1, 2, 3}`. Vektorien välistä pistetuloa merkitään — pisteellä. Laske vektorien $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ja $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ pistetulo.

Matriisit esitetään listana riveistä, jossa jokainen rivi on lista alkioistaan. Niinpä esim.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

kirjoitetaan muodossa `{{a, b}, {c, d}}`. Näin esitetyn matriisin saa tulostettua taulukkomuodossa funktiolla `MatrixForm`. Matriisien kertolaskua, samoin kuin matriisin ja vektorien kertomista merkitään pisteellä (riippumatta siitä, kummalta puolelta kerrotaan — vektori oletetaan vaaka- tai pystyvektoriksi tilanteeseen sopivasti). Olkoon $\mathbf{A}$ kuten yllä ja $\mathbf{u}=(\,x\;y\,)^T$. Laske

$$\text{(a)}\quad \mathbf{A}^2 \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{A}u \qquad \text{(c)}\quad \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{u} \qquad \text{(d)}\quad \det(\mathbf{A}) \qquad \text{(e)}\quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}.$$

Lineaarisen yhtälöryhmän ((e)-kohdassa) saat ratkaistua funktiolla `LinearSolve`. Käänteismatriisinkin saat muodostettua funktiolla `Inverse`, joskin se on laskennallisesti työläämpää.

Hilbertin matriisi $\mathbf{H}$ kokoa $n\times n$ on muotoa $\mathbf{H}_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$. Saat sen näppärästi muodostettua esim. kun $n=5$:

```
n = 5;
H = Table[ 1 / (i + j - 1), {i, 1, n}, {j, 1, n}]
```

Laske Hilbertin matriisin determinantteja vaikkapa n:n arvoilla 5, 10 ja 20. Kokeile kääntää matriisia tapauksissa $n=5$ ja $n=10$.

4 Kauniita kuvia

Yhden muuttujan funktioiden kuvaajia voi piirtää funktiolla `Plot`. Kahden muuttujan funktiosta voi piirtää kolmiulotteisen perspektiivikuvan funktiolla `Plot3D`.

Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat annetuissa alueissa:

$$\text{(a)}\quad f(x)=\frac{\sin x}{x}, \qquad -3\pi\le x\le 3\pi$$

$$\text{(b)}\quad f(x)=x^5e^{-x}, \qquad 0\le x\le 20$$

$$\text{(c)}\quad f(x)=\sin\frac{1}{x}, \qquad 0<x\le 1$$

$$\text{(d)}\quad f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad -1\le x,y\le 1.$$

(Mathematicassa e ja π ovat `E` ja `Pi`.) Kohdassa (c) vältyt turhilta virheilmoituksilta aloittamalla piirron esim. pisteestä 0.001. Kuva selventänee `Limit`-funktion edellä antamaa vastausta. Mitä osaat sanoa (d)-kohdan funktion käyttäytymisestä origossa?