Alkuviikko

1. Laske seuraavien kaarten pituudet:

   (a) $x = t^3 + 1,\quad y = 3t^2 + 2;\quad 0 \le t \le 2$

   (b) $x = 2\cos 3t,\quad y = 2\sin 3t,\quad z = t^2;\quad 0 \le t \le \pi.$

2. Laske kaarevuus ja kaarevuussäde käyrille

   (a) $\mathbf{f}(t) = (t, \frac{1}{t})$ pisteessä $t = 1$

   (b) $\mathbf{f}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j}$ pisteessä $t = \frac{\pi}{4}$.

   Hahmottele kuva, jossa näkyvät käyrä, yksikkötangenttivektori ja kaarevuusympyrä annetussa pisteessä.

3. Laske yksikkötangenttivektori $\mathbf{T}$, kaarevuus κ, pääyksikkönormaalivektori $\mathbf{n}$ sekä sivunormaalivektori $\mathbf{B}$ käyrälle

   $$\mathbf{f}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$$

   pisteessä $t = 0$.

4. Laske paikkavektoreiden

   (a) $\mathbf{f}(t) = (3\cos\frac{t}{2}, 3\sin\frac{t}{2})$ (b) $\mathbf{f}(t) = (t, t^3)$

   kiihtyvyyksien tangentiaali- ja normaalikomponentit.

5. Auto liikkuu nopeudella 100 km/h tiellä, jonka kaarevuussäde on 400 m. Millainen tien kallistus tarvitaan auton normaalikiihtyvyyden kumoamiseksi?

6. Hae ellipsin $x^2 + 2x + 4y^2 + 2y = 7$ keskipiste, polttopisteet, isoakselin päätepisteet sekä iso- ja pikkuakselit. Hahmottele ellipsi ja määritä sen eksentrisyys.

Loppuviikko

1. Määritä sen ellipsin yhtälö, jonka isoakselin päätepisteet ovat $(0, -4)$ ja $(0, 4)$ ja eksentrisyys 0.5.

2. Määritä sen paraabelin yhtälö, jonka

   (a) polttopiste on $(0, 2)$ ja johtosuora $y = -3$

   (b) polttopiste on $(3, 0)$ ja johtosuora $x = -2$.

3. Asteroidi kiertää Maata paraabelin muotoista rataa, ts. Maa on paraabelin polttopisteessä. Kun asteroidi on 100 000 km päässä Maasta, asteroidin ja Maan kautta piirretty suora muodostaa $30°$ kulman paraabelin akselin kanssa. Kuinka läheltä Maata asteroidi kulkee?

4. Määritä sen hyperbelin yhtälö, jonka

   (a) polttopisteet ovat $(-5, 0)$ ja $(5, 0)$ ja akselin päätepisteet $(-2, 0)$ ja $(2, 0)$

   (b) polttopisteet ovat $(0, -2)$ ja $(0, 2)$ ja akselin päätepisteet $(0, -1)$ ja $(0, 1)$.

5. Millaisen käyrän määrittelevät seuraavat yhtälöt:

   (a) $4x^2 + 4xy - y^2 = 9$ (b) $4x^2 + 4xy + y^2 = 9$?

   Hahmottele kuvat.

6. Osoita, että hyperbeli ja ellipsi, joilla on samat polttopisteet, leikkaavat toisensa kohtisuoraan (ts. niiden tangentit leikkauspisteissä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan).