Alkuviikko

1. Ratkaise Gaussin (Gaussin–Jordanin) menetelmällä seuraavat yhtälöryhmät:

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} 5x + y - 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 14 \\ 3x + 2y + z = 7. \end{cases}$$

2. Ratkaise yhtälöryhmät

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ 4x + y + 5z = 0 \end{cases} \quad \text{(b)}\quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ 4x + y + 5z = 2 \end{cases} \quad \text{(c)}\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + y + 5z = 0. \end{cases}$$

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Tutki, millä lukuja a, b ja c koskevalla ehdolla seuraavalla yhtälöryhmällä on ratkaisuja:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ x - y + 3z = b \\ 3x + 7y - 5z = c. \end{cases}$$

5. Yritä päätellä numeerisesti, ovatko seuraavat raja-arvot olemassa:

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\tan x}{x}.$$

6. Laske seuraavat raja-arvot analyyttisesti, mikäli ne ovat olemassa:

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 2} \frac{2x^2 + 6x + 4}{x + 2} \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$$

Loppuviikko

1. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{kun } x < 1 \\ x^3, \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Osoita, että $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ näyttämällä, että vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja yhtäsuuret.

2. Laske seuraavat raja-arvot, mikäli ne ovat olemassa:

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+3}{3x+2} \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

(c)-kohdassa voit käyttää hyödyksesi sitä, että $e = \lim_{x\to\infty}(1 + x^{-1})^x$.

3. Määritä tangentin yhtälö seuraaville funktioille annetussa pisteessä:

$$\text{(a)}\quad y = -x^2 + 3x + 5 \text{ pisteessä } (1, 7) \qquad \text{(b)}\quad y = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ pisteessä } (4, \tfrac{1}{2}).$$

4. Hahmottele funktion $y = (1 + |x|)^{-1}$ kuvaaja ja lausu sen derivaatta niissä pisteissä, joissa se on olemassa.

5. Osoita suoraan määritelmän avulla (ϵ–δ -tekniikkaa), että

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0 \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

6* Olkoon $A(x)$ sen kolmion pinta-ala, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,0)$ ja (x, x^2) ja $B(x)$ sen kolmion ala, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(0,1)$ ja (x, x^2). Laske $\lim_{x\to 0} A(x)/B(x)$, jos se on olemassa.