Alkuviikko

1. Esitä funktion $x \mapsto \sin x$ Taylorin polynomi (kehityskeskus $a = 0$, $n \in \mathbb{N}$ mielivaltainen) ja sille virhearvio.

2. (a) Esitä edellisen tehtävän tulosta käyttäen funktion $x \mapsto \sin x^3$ Taylorin polynomi.

   (b) Approksimoi integraalia $\int_0^{\pi/4} \sin x^3 \, dx$ tarkkuudella 0.001.

3. (a) Laske $\ln 1.2$ tarkkuudella 10^{-5} käyttäen funktion $x \mapsto \ln(1+x)$ Taylorin polynomia.

   (b) Laske $\arctan 0.3$ tarkkuudella 10^{-4} käyttäen Taylorin polynomia.

4. Esitä funktioiden $x \mapsto \sinh x$ ja $x \mapsto \cosh x$ Taylorin polynomit ($a = 0$, $n \in \mathbb{N}$) ja niille virhearviot.

5. Todista, että

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n.$$

6. Tutki vihearvion suppenemista nollaan sinin ja hyperbolisen sinin Taylorin kaavoissa (tehtävät 1 ja 4), kun $n \to \infty$.

Loppuviikko

1. Funktion f joitakin arvoja on annettu seuraavassa taulukossa:

x	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	-0.2231	-0.1054	0.0953	0.1823	0.2624

   Approksimoi arvoa $f(0.5)$ käyttäen ensimmäisen, toisen, kolmannen ja neljännen asteen interpolaatiopolynomia.

2. Laske $\int_{0.3}^{0.7} f(x)\, dx \approx \int_{0.3}^{0.7} P_3(x)\, dx$ edellisen tehtävän f:lle.

3. Approksimoi funktion $f(x) = \ln(1+x)$ arvoa kohdassa $x = 0.1$ lineaarisella, neliöllisellä ja kuutiollisella interpolaatiolla käyttäen f:n arvoja pisteissä $x \in \{0, 0.05, 0.20, 0.25\}$. Vertaa eriasteisten interpolaatioiden virheitä.

4. Välillä $[0,1]$ määritellystä funktiosta f tiedetään, että $|f'''(x)| \leq 1$ kaikilla $x \in [0,1]$, mutta f:n arvojen laskeminen on työlästä. Siksi tyydytään vain taulukoimaan f:n arvoja pisteissä $\frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Kuinka suureksi pitää n valita, jotta taulukosta voidaan laskea f:n arvot kaikissa välin $[0,1]$ pisteissä tarkkuudella 10^{-3}? Entä jos halutaan laskea myös f:n derivaatan arvoja samalla tarkkuudella?

5. Vertaa numeerisen derivoinnin kaavojen

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$
$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

   tarkkuutta esimerkkifunktioiilla $f(x) = \ln(1+x)$ ja $f(x) = e^x$ pisteessä $x = 0$ eri h:n arvoilla (0.2, 0.1, 0.05).

6. Olkoon f neljästi derivoituva ja f'''' jatkuva. Osoita, että

$$\frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12} f''''(\xi),$$

   jollekin $\xi \in (x-h, x+h)$.