Alkuviikko

1. Esitä piste pallokoordinaateissa, kun karteesiset koordinaatit ovat

   (a) $(2, \sqrt{3}, 4)$ (b) $(-2, \sqrt{3}, -4)$ (c) $(-1, -1, \sqrt{2})$.

   Esitä piste karteesisissa koordinaateissa, kun pallokoordinaatit ovat

   (d) $(3, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi)$ (e) $(7, \frac{7}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

2. (a) Esitä yhtälö $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ sylinteri- ja pallokoordinaatistoissa.
   (b) Esitä yhtälö $z = r^2$ karteesisissa koordinaateissa.
   (c) Esitä yhtälö $\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi = 1$ karteesisissa koordinaateissa.

3. (a) Olkoot $z = -3 + 2\mathrm{i}$ ja $w = 1 - 4\mathrm{i}$. Laske $\bar{z}$, $|z|$, z^2, $2z - 3w$, zw ja z/w.
   (b) Esitä kompleksiluvut $-3 + 4\mathrm{i}$ ja $1 - 2\mathrm{i}$ polaarimuodossa.
   (c) Esitä kompleksiluvut $12e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$, $4e^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$ ja e^{i} karteesisessa muodossa.

4. Johda $\cos 4\theta$:lle ja $\sin 4\theta$:lle lausekkeet $\cos\theta$:n ja $\sin\theta$:n funktioina käyttäen De Moivren kaavaa.

5. Suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat epäoleelliset integraalit (perustele)? Laske suppenevien integraalien arvot.

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$ (c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2}$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

6. Osoita, että

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

   suppenee.

Loppuviikko

1. Suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat epäoleelliset integraalit (perustele)? Laske suppenevien integraalien arvot.

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

2. Osoita, että

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!,$$

   missä $n \in \mathbb{N}$. (Vihjeitä: induktio, osittaisintegrointi.)

3. Laske $\sin x$:n Taylorin polynomi $P_n(x)$ ja esitä sille virhearvio (kehityskeskuksena 0, mielivaltaiselle $n \in \mathbb{N}$).

4. Laske f:n n-asteinen Taylorin polynomi kehityskeskuksena a:

   (a) $f(x) = \cos x$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 6$
   (b) $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $n = 4$
   (c) $f(x) = \sinh x$, $a = 0$, $n = 8$.

5. Approksimoi funktiota $f(x) = e^{-x^2}$ välillä $[0, \frac{1}{2}]$ Taylorin polynomilla siten, että virhe on eniintään 0.005.

6. Laske numeerisesti $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ käyttäen hyväksi edellisen tehtävän tulosta. Esitä virhearvio.