Alkuviikko

1. Riippusilta roikkuu paraabelin muotoisesta teräsvaijerista, joka on kiinnitetty kahden pylvään huippuun. Pylväät seisovat 500 m etäisyydellä toisistaan. Paraabelin huippu on sillan pinnan korkeudella. Määritä paraabelin yhtälö, kun

   (a) molemmat pylväät jatkuvat 25 m sillan pinnan yläpuolelle

   (b) toinen pylväs jatkuu 36 m ja toinen 16 m sillan pinnan yläpuolelle.

   Laske kummassakin tapauksessa myös vaijerin jännitys paraabelin huipusssa ja molemmissa päissä.

   (Luennolla todistettiin, että jännitys $|\mathbf{F}| = T\sqrt{1+4a^2(x-x_0)^2}$, $T = \mu g/(2a)$, μ on sillan massa pituusyksikköä kohti, $g \approx 9.81\mathrm{ms}^{-2}$ putoamiskiihtyvyys ja $y = a(x-x_0)^2$ paraabelin yhtälö.)

2. Tunnista seuraavat kvadraattiset pinnat ja hahmottele kuvat niistä:

   (a) $y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y+z)$

   (c) $x + y + z = x^2 + z^2$.

3. Esitä piste napakoordinaateissa, kun karteesiset koordinaatit ovat

   (a) $(5,0)$ (b) $(-4,4)$ (c) $(5,-5\sqrt{3})$ (d) $(3,3)$ (e) $(-2,-2)$.

   Esitä piste karteesisissa koordinaateissa, kun napakoordinaatit ovat

   (f) $(4,\frac{\pi}{4})$ (g) $(5,-\frac{\pi}{3})$ (h) $(-2,\frac{3}{4}\pi)$ (i) $(-2,-\frac{\pi}{4})$.

4. Hahmottele seuraavat käyrät:

   (a) kardioidi $r = 2(1-\cos\theta)$

   (b) lemniskaatta $r^2 = \sin 4\theta$.

5. Laske seuraavien käyrien rajaamien alueiden pinta-alat:

   (a) tehtävän 4a kardioidi

   (b) yksi tehtävän 4b lemniskaatan “lehdistä”.

6. Esitä piste sylinterikoordinaateissa, kun karteesiset koordinaatit ovat

   (a) $(-1,1,4)$ (b) $(0,1,0)$ (c) $(-2\sqrt{3},-2,-1)$ (d) $(2,2\sqrt{3},-4)$.

   Esitä piste karteesisissa koordinaateissa, kun sylinterikoordinaatit ovat

   (e) $(2,\frac{\pi}{3},5)$ (f) $(1,0,-3)$ (g) $(5,\frac{11}{6}\pi,-5)$.

Loppuviikko

1. Laske raja-arvot

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\ln(1+1/x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\arcsin x}$.

2. Laske raja-arvot

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}$.

3. Laske raja-arvot

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{\sin x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

4. Olkoon f riittävän monta kertaa derivoituva. Laske

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

5. Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1,$$

   mutta $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ ei ole olemassa. Tässä on esimerkki tilanteesta, jossa $\lim f(x)/g(x)$ ei ole laskettavissa L'Hospitalin säännöllä. Tarkastele L'Hospitalin säännön oletuksia tässä tapauksessa.

6. Suorat L_1 ja L_2 on annettu parametrimuotoisilla yhtälöillä

$$L_1:\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3+t \\ z = 1-t \end{cases} \quad \text{ja} \quad L_2:\begin{cases} x = 10+s \\ y = -8+4s \\ z = 5+s. \end{cases}$$

   Leikkaavatko suorat? Jos leikkaavat, määritä leikkauspiste. Jos eivät, laske suorien välinen etäisyys, ts. sen L_1:n ja L_2:n välisen janan pituus, joka on kohtisuorassa molempia suoria vastaan.