Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 5, viikko 8

1. Todista väitteet:

   (a) Involutiivisella Banach-algebralla voi olla vain yksi ekvivalentti C*-normi.

   (b) C*-algebrahomomorfismi on aina jatkuva ja normiltaan 1.

   (c) Injektiivinen C*-algebrahomomorfismi on isometria. (Vinkki: Gelfand-muunnos...)

Todistus.

(a) Jos $x \mapsto \|x\|$ on C*-normi, niin

$$\rho(x^*x) \overset{\text{luennot}}{=} \|x^*x\| \overset{C^*}{=} \|x\|^2,$$

eikä spektraalisäde riipu normista. On toki mahdollista, ettei involutiivisella Banach-algebralla ole alkuperäisen normin kanssa ekvivalenttia C*-normia.

(b) Olkoon $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ C*-algebrahomomorfismi. Nyt

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)\|^2 &\overset{C^*}{=} \|\Phi(x)^*\Phi(x)\| = \rho(\Phi(x)^*\Phi(x)) = \rho(\Phi(x^*x)) \\ &\overset{\sigma(\Phi(y))\subset\sigma(y)}{\leq} \rho(x^*x) = \|x\|^2,\end{aligned}$$

joten $\|\Phi\| \leq 1$. Koska $\Phi(\mathbb{I}_{\mathcal{A}}) = \mathbb{I}_{\mathcal{B}}$, saadaan $\|\Phi\| = 1$.

(c) Olkoon $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ injektiivinen C*-algebrahomomorfismi, $x \in \mathcal{A}$. Olkoon $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ alkion $y = x^*x$ virittämä C*-alialgebra; koska $y^*y = yy^*$ (jopa $y = y^*$), on $\mathcal{C}$ kommutatiivinen. Siten $\Phi(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$ on kommutatiivinen $*$-alialgebra, jonka sulkeuma $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ on kommutatiivinen C*-alialgebra (lukija todistakoon!). Määritellään

$$\phi : \mathrm{Spec}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{C}), \quad h \mapsto h \circ \Phi|_{\mathcal{C}}.$$

(b)-kohdan mukaan Φ on jatkuva, joten ϕ on jatkuva. Niinpä $K := \phi(\mathrm{Spec}(\mathcal{D}))$ on kompakti. **Oletetaan**, että ϕ ei ole surjektio; on siis olemassa $h_0 \in \mathrm{Spec}(\mathcal{C}) \setminus K$. Urysohnin lemman nojalla on olemassa $f, g \in C(\mathrm{Spec}(\mathcal{C}))$, joille $f|_K \equiv 1$, $g(h_0) = 1$ ja $fg = 0$. Jokaisella $h \in \mathrm{Spec}(\mathcal{D})$ pätee

$$h(\Phi(f)) = (h \circ \Phi|_{\mathcal{C}})(f) = (\phi(h))(f) = f(\phi(h)) \overset{\phi(h)\in K}{=} 1,$$

joten $\Phi(f)$ on kääntyvä algebrassa $\mathcal{D}$. Toisaalta $\Phi(g) \neq 0$, sillä Φ on injektio, joten

$$0 = \Phi(0) = \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) \neq 0,$$

ristiriita. Täten $\phi : \mathrm{Spec}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{C})$ on surjektio. Saadaan

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)\|^2 &\overset{C^*}{=} \|\Phi(x)^*\Phi(x)\| = \|\Phi(x^*x)\| \\ &= \sup_{h_{\mathcal{D}}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{D})} |h_{\mathcal{D}}(\Phi(x^*x))| = \sup_{h_{\mathcal{D}}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{D})} |(\phi(h_{\mathcal{D}}))(x^*x)| \\ &= \sup_{h_{\mathcal{C}}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{C})} |h_{\mathcal{C}}(x^*x)| \\ &= \|x^*x\| \overset{C^*}{=} \|x\|^2,\end{aligned}$$

joten Φ on isometria $\square$

2. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ Banach-alialgebra ja $x \in \mathcal{B}$. Todista väittämät:

   (a) $G(\mathcal{B})$ on suljettu ja avoin avaruuden $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ osajoukko.

   (b) $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ ja $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

   (c) Jos $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ on yhtenäinen, niin $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.

Todistus.

(a) Toki pätee $G(\mathcal{B}) \subset G(\mathcal{A})$ ja $G(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, joten $G(\mathcal{B}) \subset G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. Koska $G(\mathcal{B})$ on avaruuden $\mathcal{B}$ avoin osajoukko, on $G(\mathcal{B})$ avoin avaruudessa $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$,

Ota sitten $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset G(\mathcal{B})$, jolle $x_n \to x \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. Tällöin $(x_n^{-1})_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ ja $x_n^{-1} \to x^{-1} \in \mathcal{A}$, joten $x^{-1} \in \mathcal{B}$, koska $\mathcal{B}$ on suljettu avaruudessa $\mathcal{A}$. Täten $x \in G(\mathcal{B})$, siis $G(\mathcal{B})$ on suljettu avaruudessa $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$.

(b) Triviaalisti $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Ota sitten $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Ota $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, jolle $\lambda_n \to \lambda$. Siis

$$G(\mathcal{B}) \ni \lambda_n \mathbb{I} - x \to \lambda\mathbb{I} - x \notin G(\mathcal{B});$$

(a)-kohdan mukaan $G(\mathcal{B})$ on avaruuden $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ suljettu osajoukko, joten on oltava $\lambda\mathbb{I} - x \notin G(\mathcal{A})$. Toisaalta $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathcal{A}}(x)$, joten $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$; on todistettu, että $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

(c) Topologisen avaruuden (X, τ) osajoukko S on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa $U, V \in \tau$ siten, että $S \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ ja $S \cap U \neq \emptyset \neq S \cap V$; jos S ei ole epäyhtenäinen, se on *yhtenäinen.*

Tiedetään, että $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Oletetaan, että $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x) \neq \emptyset$. Olkoon $S := \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, $U := \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ ja $V := \sigma_{\mathcal{B}}(x) \setminus \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Tällöin $U, V \subset \mathbb{C}$ ovat avoimia,

$$\begin{aligned}
U \cap V &= \emptyset, \\
U \cup V &= (\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)) \cup (\sigma_{\mathcal{B}}(x) \setminus \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)) \;=\; \mathbb{C} \setminus \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \\
&\overset{\text{(b)}}{\supset} \mathbb{C} \setminus \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x) \\
&\supset \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x) \;=\; S, \\
S \cap U &= (\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)) \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)) \;=\; \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x) \;\neq\; \emptyset, \\
S \cap V &= (\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)) \cap (\sigma_{\mathcal{B}}(x) \setminus \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)) \;=\; \sigma_{\mathcal{B}}(x) \setminus (\sigma_{\mathcal{A}}(x) \cup \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x)) \\
&\overset{\text{(b)}}{\supset} \sigma_{\mathcal{B}}(x) \setminus (\sigma_{\mathcal{A}}(x) \cup \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)) \;=\; \sigma_{\mathcal{B}}(x) \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x) \;\neq\; \emptyset.
\end{aligned}$$

Täten $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ on epäyhtenäinen. Kääntäen, jos $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ on yhtenäinen, niin $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ $\square$

3. Olkoon $\mathcal{A}$ C*-algebra, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ C*-alialgebra ja $x \in \mathcal{B}$. Osoita, että

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x).$$

(Vinkki: käsittele ensin tapaus $x^* = x$ edellisen tehtävän avulla...)

Todistus. Toki triviaalisti $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Ota siis $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Olkoon

$$y = \lambda \mathbb{I} - x,$$

jolloin $y \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. Olkoon

$$z = y^* y,$$

jolloin $z^* = z \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. Luentojen erään tuloksen mukaan $\sigma_{\mathcal{A}}(z) \subset \mathbb{R}$; tämän vuoksi $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(z)$ on yhtenäinen, koska spektri on rajoitettu. Edellisen tehtävän nojalla $\sigma_{\mathcal{A}}(z) = \sigma_{\mathcal{B}}(z)$. Saadaan $z \in G(\mathcal{B})$, mistä seuraa

$$y^{-1} = y^{-1}(y^*)^{-1}y^* = (y^*y)^{-1}y^* = z^{-1}y^* \in \mathcal{B};$$

täten $(\lambda\mathbb{I} - x)^{-1} = y^{-1} \in \mathcal{B}$, siis $\lambda\mathbb{I} - x \in G(\mathcal{B})$ eli $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. On todistettu, että $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ eli $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ $\square$

4. Olkoon $\mathcal{A}$ C*-algebra, $x \in \mathcal{A}$, $x^*x = xx^*$, $f \in C(\sigma(x))$ ja $g \in C(f(\sigma(x)))$. Osoita, että

(a) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$,

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Luentojen kertausta: Olkoon $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ alkion $x \in \mathcal{A}$ virittämä C*-alialgebra. Koska x on normaali (eli $x^*x = xx^*$), on $\mathcal{B}$ kommutatiivinen. Olkoon $\Gamma_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to C(\mathrm{Spec}(\mathcal{B}))$ Gelfand-muunnos. Kuvaus

$$\Gamma_{\mathcal{B}} x = \widehat{x} : \mathrm{Spec}(\mathcal{B}) \to \sigma(x)$$

on homeomorfismi, ja kuvaus

$$C_{\widehat{x}} : C(\sigma(x)) \to C(\mathrm{Spec}(\mathcal{B})), \quad f \mapsto f \circ \widehat{x}$$

on isometrinen $*$-isomorfismi. *Normaalin alkion $x \in \mathcal{A}$ jatkuva funktionaalikalkyyli* on isometrinen $*$-homomorfismi

$$\phi := \Gamma_{\mathcal{B}}^{-1} \circ C_{\widehat{x}} : C(\sigma(x)) \to \mathcal{B} \subset \mathcal{A}.$$

Jos $f \in C(\sigma(x))$, niin määritellään $f(x) := \phi(f) = \Gamma_{\mathcal{B}}^{-1}(f \circ \Gamma_{\mathcal{B}} x)$.

Todistus. Olkoon $\mathcal{B}$ kuten edellä. Jos $f \in C(\sigma(x))$ ja $\psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})$, niin

$$\begin{aligned} f(\psi(x)) &= f(\widehat{x}(\psi)) = (C_{\widehat{x}} f)(\psi) = \psi(\Gamma_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\widehat{x}} f)) = \psi(\phi(f)) \\ &= \psi(f(x)); \end{aligned}$$

hyödynnetään tätä havaintoa seuraavassa:

(a)

$$\begin{aligned} \sigma(f(x)) &= \{\psi(f(x)) \mid \psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \\ &= \{f(\psi(x)) \mid \psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \\ &= f(\sigma(x)). \end{aligned}$$

(b) Olkoon $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ alkion $f(x) \in \mathcal{B}$ virittämä C*-alialgebra. Ota $\psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})$. Tällöin

$$\begin{aligned} \psi((g \circ f)(x)) &= (g \circ f)(\psi(x)) \\ &= g(f(\psi(x))) \\ &= g(\psi(f(x))) \\ &= g(\psi|_{\mathcal{C}}(f(x))) \\ &= \psi|_{\mathcal{C}}(g(f(x))) \\ &= \psi(g(f(x))), \end{aligned}$$

ja koska tämä pätee kaikilla $\psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})$, saadaan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ □

5. Todista väitteet:

   (a) Jos topologisella avaruudella on numeroituva kanta, niin se on separoituva.

   (b) Metrisellä topologialla on numeroituva kanta jos ja vain jos avaruus on separoituva.

Todistus.

(a) Olkoon $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=0}^{\infty}$ topologisen avaruuden (X, τ) numeroituva kanta; voidaan olettaa, että $\mathcal{B} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$. Ota $x_j \in B_j$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Ota $x \in X$ ja $U \in \mathcal{V}(x)$. Tällöin on olemassa $j \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in B_j \subset U$. Siispä $x_j \in U$; perhe $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ on tiheä avaruudessa X eli X on separoituva.

(b) (a)-kohdan nojalla riittää todistaa, että separoituvan metrisen avaruuden topologialla on numeroituva kanta. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $\{x_j\}_{j=0}^{\infty} \subset X$ tiheä joukko. Määritellään numeroituva perhe

$$\mathcal{B} := \{B_d(x_j, 1/n) \mid j \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Ota epätyhjä avoin joukko $U \subset X$. Ota $x \in U$. Tällöin on olemassa $r > 0$, jolla $B_d(x, r) \subset U$. Ota $n \in \mathbb{Z}^+$, jolle $1/n < r/2$. Valitaan $j \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_j, x) < 1/n$. Nyt

$$x \in B_d(x_j, 1/n) \subset B_d(x, r) \subset U,$$

joten $\mathcal{B}$ on metrisen topologian τ_d numeroituva kanta $\square$

6. Varustetaan joukko

$$X = \{f : [0,1] \to [0,1] \mid x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\}$$

tuloavaruudesta $[0,1]^{[0,1]}$ perityllä topologialla. Osoita, että näin saadaan ei-metristyvä separoituva kompakti Hausdorff-avaruus.

Kertausta: Jos A, B ovat epätyhjiä joukkoja, voidaan karteesinen tulo A^B tulkita kuvausten $f : B \to A$ joukoksi. Tässä siis $[0,1]^{[0,1]}$ on kuvausten $f : [0,1] \to [0,1]$ joukko. Jokaisella $x \in B$ määritellään koordinaattiprojektio $p_x = (f \mapsto f(x)) : A^B \to A$. Jos A on topologinen avaruus, niin karteesisen tulon A^B tulotopologia on perheen $\{p_x \mid x \in B\}$ indusoima (siis heikoin topologia, jonka suhteen jokainen p_x on jatkuva).

Todistus. Avaruus $[0,1]$ varustetaan toki metriikan $(x,y) \mapsto |x-y|$ antamalla topologialla. Hausdorff-avaruuksien karteesinen tulo on Hausdorff-avaruus, joten $[0,1]^{[0,1]}$ on Hausdorff-avaruus. Jokainen Hausdorff-avaruuden osajoukko perii Hausdorff-topologian, joten $X \subset [0,1]^{[0,1]}$ on Hausdorff-avaruus.

Osoitetaan, että X on avaruuden $[0,1]^{[0,1]}$ suljettu osajoukko: Ota $g \in [0,1]^{[0,1]} \setminus X$. On siis olemassa $x, y \in [0,1]$, joille $x < y$ ja $g(y) < g(x)$. Olkoon $0 < r < (g(x) - g(y))/2$. Määritellään

$$U := p_y^{-1}(]0, g(y) + r[) \cap p_x^{-1}(]g(x) - r, 1[).$$

Koordinaattiprojektiot p_x, p_y ovat jatkuvia, joten $U \subset [0,1]^{[0,1]}$ on pisteen g ympäristö. Toisaalta $U \cap X = \emptyset$, joten on todistettu, että $[0,1]^{[0,1]} \setminus X$ on avoin eli $X \subset [0,1]^{[0,1]}$ on suljettu. Kompaktien avaruuksien karteesinen tulo on Tihonovin lauseen mukaan kompakti. Näin ollen $[0,1]^{[0,1]}$ on kompakti, ja X on kompaktin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti.

Jokaisella $n \in \mathbb{Z}^+$ määritellään perhe

$$S_n := \{f \in X \mid \{f(j/n)\}_{j=0}^n \subset \mathbb{Q},\ f \text{ lineaarinen janoilla } [(j-1)/n, j/n]\}.$$

Selvästi S_n on numeroituva, joten $S := \bigcup_{n=1}^\infty S_n$ on numeroituva. On helppo tarkistaa, että S on tiheä avaruudessa X. Täten X on separoituva.

Olkoon $x \in [0,1]$. Määritellään

$$f_x(y) := \begin{cases} 0, & \text{kun } y < x, \\ 1/2, & \text{kun } y = x, \\ 1, & \text{kun } y > x. \end{cases}$$

Tällöin $F := \{f_x \mid x \in [0,1]\}$ on avaruuden X ylinumeroituva diskreetti osajoukko, eikä avaruudella F siten ole numeroituvaa kantaa. Jos avaruudella on numeroituva kanta, niin myös sen kaikilla aliavaruuksilla on numeroituva kanta; tämän vuoksi avaruudella X ei voi olla numeroituvaa kantaa. Kompakti Hausdorff-avaruus metristyy täsmälleen silloin, kun sillä on numeroituva kanta, joten avaruus X ei voi olla metristyvä □

Bonustehtävä! Olkoon $x \mapsto x^*$ C*-algebran $\mathcal{A}$ involuutio ja $y \mapsto y^\star$ C*-algebran $\mathcal{B}$ involuutio. Oletetaan, että Banach-algebroina $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat samat, ja että pätee

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 = \|x^\star x\|$$

jokaisella $x \in \mathcal{A}$. Osoita, että $x^* = x^\star$ jokaisella $x \in \mathcal{A}$.

Ratkaisu. Seuraavassa $\mathcal{A}$ on C*-algebra. Haluamme siis osoittaa, ettei C*-algebran involuutiota voi sorkkia tuhoamatta C*-rakennetta — hieno tulos sinänsä, mutta oheinen todistusketju välituloksineen on mielenkiintoisempi:

Positiiviset funktionaalit. Lineaarinen funktionaali $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ on *positiivinen*, jos $f(x^*x) \geq 0$ jokaisella $x \in \mathcal{A}$.

Lemma. *Olkoon $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ positiivinen lineaarinen funktionaali. Tällöin $f(x^*) = \overline{f(x)}$ jokaisella $x \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{A}'$ ja $\|f\| = f(\mathbb{I})$.*

Todistus. Huomaa, että $f(\mathbb{I}) = f(\mathbb{I}^*\mathbb{I}) \geq 0$. Koska

$$0 \leq f((x+\mathbb{I})^*(x+\mathbb{I})) = f(x^*x) + f(x^*) + f(x) + f(\mathbb{I}),$$

$$0 \leq f((x+i\mathbb{I})^*(x+i\mathbb{I})) = f(x^*x) + if(x^*) - if(x) + f(\mathbb{I}),$$

saadaan $f(x^*) + f(x) \in \mathbb{R}$ ja $if(x^*) - if(x) \in \mathbb{R}$. Täten $\Im(f(x^*)) = -\Im(f(x))$ ja $\Re(f(x^*)) = \Re(f(x))$, siis $f(x^*) = \overline{f(x)}$.

Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Nyt edellisen nojalla

$$\begin{aligned} 0 &\leq f\left((x + tf(x)\mathbb{I})^*(x + tf(x)\mathbb{I})\right) \\ &= f(x^*x) + tf(x^*)f(x) + t\overline{f(x)}f(x) + t^2|f(x)|^2 f(\mathbb{I}) \\ &= f(x^*x) + 2t|f(x)|^2 + t^2|f(x)|^2 f(\mathbb{I}), \end{aligned}$$

ja tämä pätee kaikilla $t \in \mathbb{R}$; jos $f(\mathbb{I}) = 0$, pitää siis olla $f \equiv 0$, jolloin tietenkin $\|f\| = 0 = f(\mathbb{I})$; muutoin viimeisin muuttujan $t \in \mathbb{R}$ lauseke saa pienimmän arvonsa, kun $t = -1/f(\mathbb{I})$, mistä seuraa

$$|f(x)|^2 \leq f(x^*x)\ f(\mathbb{I}).$$

Olkoon $\mathcal{B}$ alkion $y = x^*x$ virittämä C*-algebra; $\mathcal{B}$ on kommutatiivinen, sillä $y^*y = yy^*$ (pätee jopa $y^* = y$). Olkoon $\phi : C(\sigma(x^*x)) \to \mathcal{B}$ jatkuva funktionaalikalkyyli pisteessä $x^*x \in \mathcal{A}$. Nyt

$$\sigma(x^*x) = \{\psi(x^*x) :\ \psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} = \{|\psi(x)|^2 :\ \psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \subset [0, \rho(x^*x)],$$

joten jos $t > \rho(x^*x)$, niin

$$\sigma(t\mathbb{I} - x^*x) = \{t - \lambda \mid \lambda \in \sigma(x^*x)\} \subset [t - \rho(x^*x), t] \subset [0, t].$$

Jos siis $t > \rho(x^*x)$, niin voidaan määritellä alialgebran $\mathcal{B}$ alkio

$$\sqrt{t\mathbb{I} - x^*x} := \phi(\sqrt{\phi^{-1}(t\mathbb{I} - x^*x)}) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A},$$

missä $\sqrt{f}(\lambda) := \sqrt{f(\lambda)}$, kun $f : \sigma(x^*x) \to [0, \infty[$. Tällöin

$$0 \leq f(\sqrt{t\mathbb{I} - x^*x}^*\sqrt{t\mathbb{I} - x^*x}) = f(\sqrt{t\mathbb{I} - x^*x}\sqrt{t\mathbb{I} - x^*x}) = f(t\mathbb{I} - x^*x) = tf(\mathbb{I}) - f(x^*x)$$

jokaisella $t > \rho(x^*x)$. Täten $f(x^*x) \leq \rho(x^*x)f(\mathbb{I})$, mistä seuraa

$$|f(x)|^2 \leq f(x^*x)f(\mathbb{I}) \leq \rho(x^*x)f(\mathbb{I})^2 = \|x\|^2 f(\mathbb{I})^2;$$

saatiin $|f(x)| \leq f(\mathbb{I})\|x\|$, joten $\|f\| \leq f(\mathbb{I})$. Toisaalta $|f(\mathbb{I})| = f(\mathbb{I})$, joten $\|f\| = f(\mathbb{I})$ $\square$

Propositio. *Lineaarinen funktionaali $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ on positiivinen jos ja vain jos se on rajoitettu ja $\|f\| = f(\mathbb{I})$.*

Todistus. Edellisessä lemmassa osoitettiin, että positiivisuudesta seuraa $\|f\| = f(\mathbb{I})$. Kääntäen, olkoon $f \in \mathcal{A}'$, $\|f\| = f(\mathbb{I})$. Jos $f = 0$, niin se on toki positiivinen; muutoin voidaan yleisyyttä menettämättä olettaa, että $\|f\| = f(\mathbb{I}) = 1$. Olkoon $y = y^* \in \mathcal{A}$, $f(y) = r + is$, missä $r, s \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että $f(y) \in \mathbb{R}$ eli että $s = 0$. Olkoon $z = t\mathbb{I} - iy$, missä $t \in \mathbb{R}$. Nyt

$$|f(z)|^2 = |f(t\mathbb{I} - iy)|^2 = |tf(\mathbb{I}) - if(y)|^2 \overset{f(\mathbb{I})=1}{=} |t - ir + s|^2 = (t+s)^2 + r^2.$$

Edelleen,

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\overset{\mathrm{C}^*}{=} \|z^*z\| = \|(t\mathbb{I} + iy)(t\mathbb{I} - iy)\| = \|t^2\mathbb{I} + y^2\| \\ &\le t^2 + \|y\|^2 = |f(z)|^2 - (r^2 + s^2) - 2st + \|y\|^2 \\ &\le \|f\|^2 \, \|z\|^2 - 2st + \|y\|^2 = \|z\|^2 - 2st + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Tästä seuraa $2st \le \|y\|^2$ jokaisella $t \in \mathbb{R}$, mikä on mahdollista vain, jos $s = 0$. Täten $f(y) \in \mathbb{R}$ aina, kun $y^* = y$.

Ota $x \in \mathcal{A}$. Olkoon $t := \|x^*x\|$ ja $y := x^*x$. Tällöin $y^* = y$, joten $f(x^*x) \in \mathbb{R}$ ja

$$\begin{aligned} f(x^*x) &= f(t\mathbb{I} - (t\mathbb{I} - x^*x)) = tf(\mathbb{I}) - f(t\mathbb{I} - x^*x) \overset{f(\mathbb{I})=1}{=} t - f(t\mathbb{I} - x^*x) \\ &\ge t - \|f\| \, \|t\mathbb{I} - x^*x\| \overset{\|f\|=1}{=} t - \|t\mathbb{I} - x^*x\|. \end{aligned}$$

Tässä $\|t\mathbb{I} - x^*x\| = \rho(t\mathbb{I} - x^*x) \le t$, sillä $\sigma(t\mathbb{I} - x^*x) = \{t - \lambda : \ \lambda \in \sigma(x^*x)\} \subset [0, t]$, mikä osoitetaan samalla tavoin kuin vastaava kohta edellisen lemman todistuksessa □

Korollaari. *Jokainen C^*-alialgebran $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ positiivinen lineaarinen funktionaali voidaan jatkaa C^*-algebran $\mathcal{A}$ positiiviseksi lineaariseksi funktionaaliksi.*

Todistus. Ota positiivinen lineaarinen funktionaali $\phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$. Tällöin ϕ on rajoitettu, $\|\phi\| = \phi(\mathbb{I})$. Hahn–Banach -lauseen mukaan on ϕ voidaan jatkaa rajoitetuksi lineaariseksi funktionaaliksi $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, jolle $\|f\| = \|\phi\|$. Siten $\|f\| = \|\phi\| = \phi(\mathbb{I}) = f(\mathbb{I})$, eli f on positiivinen lineaarinen funktionaali □

Lause. *Positiiviset lineaariset funktionaalit separoivat C^*-algebran pisteet.*

Todistus. Olkoot $x, y \in \mathcal{A}$, $x \ne y$. Olkoon $z = x - y \ne 0$. Olkoon $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ alkion z^*z virittämä C*-alialgebra; toki se on kommutatiivinen. Nyt $z^*z \ne 0$, joten jollakin $\phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})$ pätee $|\phi(z)|^2 = \phi(z^*z) \ne 0$. Koska ϕ on positiivinen lineaarinen funktionaali, se voidaan laajentaa positiiviseksi lineaariseksi funktionaaliseksi $f \in \mathcal{A}'$. Nyt $f(z) = \phi(z) \ne 0$, siis $f(x) \ne f(y)$ □

Korollaari. *Jos $x \mapsto x^*$ ja $x \mapsto x^\star$ ovat Banach-algebran $\mathcal{A}$ involuutioita, jotka molemmat toteuttavat C^*-ehdon, niin ne ovat samat.*

Todistus. Sanotaan, että lineaarinen funktionaali $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ on $*$-positiivinen (vastaavasti $\star$-positiivinen), jos $f(x^*x) \geq 0$ (vastaavasti $f(x^\star x) \geq 0$) jokaisella $x \in \mathcal{A}$. Aiemman proposition mukaan f on $*$-positiivinen (vastaavasti $\star$-positiivinen) täsmälleen silloin, kun $\|f\| = f(\mathbb{I})$, joten $*$-positiivisuus ja $\star$-positiivisuus ovat sama käsite. Olkoon $x \in \mathcal{A}$. Aiemman lemman nojalla

$$f(x^* - x^\star) = f(x^*) - f(x^\star) = \overline{f(x)} - \overline{f(x)} = 0$$

jokaisella positiivisella f. Edellisen lauseen perusteella $x^* - x^\star = 0$ eli $x^* = x^\star$ □

Huomautuksia. C*-algebran positiiviset lineaariset funktionaalit edustavat "epäkommutatiivista mittateoriaa" seuraavassa mielessä: **Rieszin esityslauseen** mukaan kommutatiivisen C*-algebran $C(K)$ positiiviset lineaariset funktionaalit ovat muotoa

$$f \mapsto \int_K f(x)\ \mathrm{d}\mu(x),$$

missä μ on yksikäsitteinen säännöllinen Borel-mitta; jos funktionaali on normiltaan 1, on kyseessä todennäköisyysmitta. Yleisellä C*-algebralla *tila* (engl. *state*, nimitys peräisin kvanttimekaniikasta) on positiivinen lineaarinen funktionaali, jonka normi on 1; eräänlainen "epäkommutatiivinen todennäköisyysmitta".