Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 4, viikko 7

1. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra, $x, y \in \mathcal{A}$ ja $xy = yx$. Osoita, että $\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$ ja $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.
(Vinkki: miten **kommutatiivisessa** Banach-algebrassa alkion spektri ja algebran spektri liittyvätkään toisiinsa...?)

Todistus. Määritellään $\mathcal{B} := \Gamma(\Gamma(\{x, y\}))$; edellisen viikon harjoitustehtävän nojalla $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ on kommutatiivinen Banach-alialgebra, joka sisältää joukon $\{x, y\}$ ja jossa $\sigma_{\mathcal{B}}(z) = \sigma_{\mathcal{A}}(z)$ jokaisella $z \in \mathcal{B}$. Niinpä saadaan

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{A}}(x+y) &= \sigma_{\mathcal{B}}(x+y) \\
&= \{\phi(x+y) \mid \phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \\
&= \{\phi(x) + \phi(y) \mid \phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \\
&\subset \{\phi(x) \mid \phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} + \{\psi(y) \mid \psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \\
&= \sigma_{\mathcal{B}}(x) + \sigma_{\mathcal{B}}(y) \\
&= \sigma_{\mathcal{A}}(x) + \sigma_{\mathcal{A}}(y).
\end{aligned}$$

Aivan vastaavasti todistetaan, että $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{A}}(xy) &= \sigma_{\mathcal{B}}(xy) \\
&= \{\phi(xy) \mid \phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \\
&= \{\phi(x)\phi(y) \mid \phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \\
&\subset \{\phi(x) \mid \phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\}\ \{\psi(y) \mid \psi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{B})\} \\
&= \sigma_{\mathcal{B}}(x)\sigma_{\mathcal{B}}(y) \\
&= \sigma_{\mathcal{A}}(x)\sigma_{\mathcal{A}}(y)
\end{aligned}$$

$\square$

2. Olkoon $\mathcal{A} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{ix\cdot n},\ \|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n| < \infty \right\}$. Todista:

(a) $\mathcal{A}$ on kommutatiivinen Banach-algebra.

(b) Jos $f \in \mathcal{A}$, $\forall x :\ f(x) \neq 0$, niin $1/f \in \mathcal{A}$.

Todistus. (b)-kohdassa sanotaan, että jos f on jatkuva jaksollinen funktio, jolla on absoluuttisesti summautuva trigonometrinen sarja ja joka ei katoa missään pisteessä, niin funktiolla $1/f$ on absoluuttisesti summautuva trigonometrinen sarja — tämän kuuluisan tuloksen todisti Norbert Wiener vuonna 1932. Israil Gelfand osoitti vuonna 1940, kuinka helposti tällaiset "vaikeat" väittämät saattaa ratkaista sopivilla työkaluilla.

(a) Oletetaan tunnetuksi, että $\ell^1(\mathbb{Z})$ on Banach-avaruus. Ota $f, g \in \mathcal{A}$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Havaitaan, että

$$(\lambda f)_n = \lambda f_n, \quad (f+g)_n = f_n + g_n \quad \text{ja,}$$

joten meillä on Banach-avaruusisomorfismi $\mathcal{A} \cong \ell^1(\mathbb{Z})$. Edelleen,

$$\begin{aligned} \|fg\| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(fg)_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{n-k}\, g_k \right| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_{n-k}|\ |g_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_{n-k}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_k|\ \|f\| = \|f\|\ \|g\|; \end{aligned}$$

lopputulos pyhitti keinot ;). Tässä muuten havaitaan, että algebran $\mathcal{A}$ pisteittäistä tuloa vastaa algebran $\ell^1(\mathbb{Z})$ konvoluutiotulo. Kommutatiivisuus on selvä. Lisäksi $\|\mathbb{I}\| = 1$, sillä $\mathbb{I}(x) \equiv 1$, $\mathbb{I}_n = \delta_{0,n}$.

(b) Tiedämme, että $f \in \mathcal{A}$ on kääntyvä jos ja vain jos $\phi(f) \neq 0$ kaikilla $\phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$. Oletetaan, että $f(x) \neq 0$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $e_n = (x \mapsto e^{ix\cdot n}) \in \mathcal{A}$. Olkoon $\phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$. Koska $\|e_{-1}\| = 1 = \|e_1\|$ ja $\|\phi\| = 1$, saadaan

$$\begin{aligned} 1 &= \phi(\mathbb{I}) = \phi(e_{-1}e_1) = |\phi(e_{-1})|\ |\phi(e_1)| \\ &\leq \|\phi\|\ \|e_{-1}\|\ |\phi(e_1)| = |\phi(e_1)| \\ &\leq \|\phi\|\ \|e_1\| = 1, \end{aligned}$$

joten $|\phi(e_1)| = 1$ eli $\phi(e_1) = e^{ix}$ jollakin $x \in \mathbb{R}$. Tästä seuraa, että $\phi(e_n) = e^{ix\cdot n}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, ja edelleen

$$\phi(f) = \phi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e_n\right) \overset{\phi \text{ jatkuva}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, \phi(e_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{ix\cdot n} = f(x) \neq 0;$$

f kääntyvä, koska $\phi(f) \neq 0$ kaikilla $\phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$

□

3. Banach-algebran $\mathcal{A}$ *radikaali* $\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ on sen maksimaalisten ideaalien leikkaus (voidaan osoittaa, että $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid \forall z \in \mathcal{A}: \ \rho(xz) = 0\}$). Osoita, että jos $\mathcal{A}$ on kommutatiivinen, niin

   (a) $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(x \mapsto \widehat{x})$, missä $x \mapsto \widehat{x}$ on Gelfand-muunnos;

   (b) $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid \rho(x) = 0\}$;

   (c) Nilpotentit alkiot kuuluvat radikaaliin.

Todistus.

(a) Gelfand-muunnos määriteltiin $\widehat{x}(h) := h(x)$, kun $x \in \mathcal{A}$ ja $h \in \operatorname{Spec}(\mathcal{A})$, joten

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) &= \bigcap \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \subset \mathcal{A} \text{ maksimaalinen ideaali}\} \\
&\overset{\text{Gelfand}}{=} \bigcap_{h \in \operatorname{Spec}(\mathcal{A})} \operatorname{Ker}(h) \\
&= \operatorname{Ker}(x \mapsto \widehat{x}).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) &\overset{\text{(a)}}{=} \operatorname{Ker}(x \mapsto \widehat{x}) \\
&= \{x \in \mathcal{A} \mid \forall h \in \operatorname{Spec}(\mathcal{A}): \ h(x) = \widehat{x}(h) = 0\} \\
&= \{x \in \mathcal{A} \mid \sigma(x) = \{0\}\} \\
&= \{x \in \mathcal{A} \mid \rho(x) = 0\}.
\end{aligned}$$

(c) Jos $x^k = 0$, niin $0 = h(0) = h(x^k) = h(x)^k$ eli $h(x) = 0$ jokaisella $h \in \operatorname{Spec}(\mathcal{A})$, siis $x \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$. Tämän voi myös päätellä spektraalisädekaavan avulla:

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|0\|^{1/n} = 0,$$

joten (b)-kohdan nojalla $x \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ $\square$

4. (a) Olkoon X äärellinen joukko. Millainen on funktioiden $f : X \to \mathbb{C}$ Banach-algebran $\mathcal{F}(X)$ Gelfand-muunnos?

(b) Millainen on matriisien $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) Banach-algebran $\mathcal{A}$ Gelfand-muunnos?

Ratkaisu.

(a) Nyt joukko X ja $\mathrm{Spec}(\mathcal{F}(X))$ voidaan samaistaa: Selvästi evaluaatiokuvaus $\phi_x := (f \mapsto f(x))$ on homomorfismi $\mathcal{F}(X) \to \mathbb{C}$ jokaisella $x \in X$. Luennoilla osoitettiin, ettei muita homomorfismeja ole (tässä tietenkin annetaan joukolle X diskreetti topologia). Todistetaan tämä uudelleen. **Oletetaan**, että $\phi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{F}(X))$ ei ole muotoa ϕ_x millään $x \in X$. Ideaali $\mathrm{Ker}(\phi)$ on maksimaalinen, sillä $\dim(\mathcal{F}(X)) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) + \dim(\phi(\mathcal{F}(X))) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) + 1$. Ota jokaisella $x \in X$ funktio $f_x \in \mathrm{Ker}(\phi) \setminus \mathrm{Ker}(\phi_x)$. Tällöin

$$f := \sum_{x \in X} |f_x|^2 = \sum_{x \in X} \overline{f_x}\, f_x \in \mathrm{Ker}(\phi);$$

toisaalta $f(y) > 0$ jokaisella $y \in X$, joten $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$ on kääntyvä. Mutta missään ideaalissa ei ole kääntyviä alkioita, saatiin **ristiriita**.

Jos siis $\phi_x = (f \mapsto f(x)) \in \mathrm{Spec}(\mathcal{F}(X))$ niin

$$\widehat{f}(\phi_x) = \phi_x(f) = f(x).$$

(b) Merkitään $x_{\alpha\beta} = x(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Selvästi $\mathcal{A}$ on vektoriavaruus. Nyt $x_{\alpha\beta}$ on kääntyvä jos ja vain jos $\alpha \neq 0$, jolloin

$$x(\alpha, \beta)^{-1} = x(1/\alpha, -\beta/\alpha^2).$$

Algebran $\mathcal{A}$ ei-kääntyvien alkioiden joukko $\mathcal{M} := \{x(0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{C}\}$ on täten ainoa ei-triviaali ideaali, joten $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$. Maksimaalista ideaalia $\mathcal{M}$ vastaa algebrahomomorfismi, jonka kerneli on $\mathcal{M}$; määritellään $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ siten, että

$$h(x_{\alpha\beta}) := \alpha;$$

tämä on haluttu algebrahomomorfismi! Täten $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) = \{h\}$ ja Gelfand-muunnos $\widehat{x_{\alpha\beta}} \in \widehat{\mathcal{A}} = C(\mathrm{Spec}(\mathcal{A})) = C(\{h\}) = \{f \mid f : \{h\} \to \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$ toteuttaa

$$\widehat{x_{\alpha\beta}}(h) = h(x_{\alpha\beta}) = \alpha$$

$\square$

Huomautus. (a)-kohdan voi myös ratkaista monimutkaisemmin, tehtävän 6 tyyliin: Olkoon $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}(X)$ ideaali ja $\emptyset \neq S \subset X$. Määritellään

$$\mathcal{I}(S) := \{f \in \mathcal{F}(X) \mid \forall x \in S :\ f(x) = 0\}, \quad V(\mathcal{J}) := \{x \in X \mid \forall f \in \mathcal{J} : f(x) = 0\}.$$

Triviaalisti $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$. On helppo todistaa, että $i \in \mathcal{J}$, missä

$$x \in X \setminus V(\mathcal{J}) \Rightarrow i(x) = 1, \quad x \in V(\mathcal{J}) \Rightarrow i(x) = 0.$$

Jos siis $f \in \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$, niin $f = f\, i \in \mathcal{J}$; saadaan tulos $\mathcal{J} = \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$ jokaiselle ideaalille $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}(X)$. Tämän jälkeen osoitetaan, että jos $h \in \mathrm{Spec}(\mathcal{F}(X))$, niin $V(\mathrm{Ker}(h)) = \{x\}$ jollekin $x \in X$. Siten $h = (f \mapsto \lambda f(x))$ jollekin $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, mutta osoittautuu, että $\lambda = 1$: jos $f(x) = 1$, niin $\lambda = h(f) = h(f^2) = h(f)^2 = \lambda^2$...

5. (Weierstrassin lauseen todistuksen viimeistely.) Olkoon $k_n(x) := \dfrac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t}$, kun $|x| \leq 1$ (ja $k_n(x) = 0$, kun $|x| > 1$). Osoita, että

$$\int_\delta^1 k_n(x) \, \mathrm{d}x \to_{n\to\infty} 0,$$

kun $0 < \delta < 1$.

Todistus. Olkoon $0 < \delta < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_\delta^1 k_n(x) \, \mathrm{d}x &= \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t} \\
&\overset{0<\varepsilon<1}{\leq} \frac{\int_\delta^1 (1-\delta^2)^n \, \mathrm{d}x}{\int_0^\varepsilon (1-\varepsilon^2)^n \, \mathrm{d}t} \\
&= \frac{1-\delta}{\varepsilon} \left(\frac{1-\delta^2}{1-\varepsilon^2} \right)^n \\
&\to_{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

kun $0 < \varepsilon < \delta < 1$ $\square$

6. Olkoon K kompakti Hausdorff-avaruus, $\emptyset \neq S \subset K$ ja olkoon $\mathcal{J} \subset C(K)$ ideaali. Määritellään

$$\mathcal{I}(S) := \{f \in C(K) \mid \forall x \in S : \; f(x) = 0\}, \quad V(\mathcal{J}) := \{x \in K \mid \forall f \in \mathcal{J} : f(x) = 0\}.$$

Osoita, että

(a) $\mathcal{I}(S) \subset C(K)$ on suljettu ideaali,

(b) $\emptyset \neq V(\mathcal{J}) \subset K$ on suljettu joukko,

(c) $V(\mathcal{I}(S)) = \overline{S}$ (vinkki: Urysohn),

(d) $\mathcal{I}(V(\mathcal{J})) = \overline{\mathcal{J}}$.

Todistus.

(a) Joukko $\mathcal{I}(S) \subset C(K)$ on selvästi vektorialiavaruus: $\lambda f, f+g \in \mathcal{I}(S)$, jos $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $f, g \in \mathcal{I}(S)$. Jos $f \in \mathcal{I}(S)$, $x \in S$ ja $g \in C(K)$, niin $(fg)(x) = f(x)g(x) = 0g(x) = 0$, joten $fg = gf \in \mathcal{I}(S)$; $\mathbb{I} \notin \mathcal{I}(S)$, joten $\mathcal{I}(S)$ on ideaali. Maksimaalinen ideaali $\mathcal{I}(\{x\}) = \mathrm{Ker}(f \mapsto f(x)) \subset C(K)$ on suljettu, joten

$$\mathcal{I}(S) = \bigcap_{x \in S} \mathcal{I}(\{x\})$$

on suljettu.

(b) Koska $\{x \in K \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ on suljettu jokaisella $f \in C(K)$, on joukko

$$V(\mathcal{J}) = \bigcap_{f \in \mathcal{J}} f^{-1}(\{0\})$$

suljettu. **Oletetaan**, että $V(\mathcal{J}) = \emptyset$. Tällöin voidaan jokaisella $x \in K$ valita $f_x \in \mathcal{J}$, jolle $f_x(x) \neq 0$; jatkuvuuden nojalla on olemassa $U_x \in \mathcal{V}(x)$, jolle $0 \notin f_x(U_x)$. Koska $\{U_x \mid x \in K\}$ on kompaktin avaruuden K avoin peite, on sillä äärellinen osapeite $\{U_{x_j}\}_{j=1}^{n}$. Tällöin

$$f = \sum_{j=1}^{n} |f_{x_j}|^2 = \sum_{j=1}^{n} \overline{f_{x_j}} \; f_{x_j} \in \mathcal{J},$$

ja $f(x) > 0$ kaikilla $x \in K$; tämä on **ristiriita**, sillä tällöin $f \in \mathcal{J}$ olisi kääntyvä! Siten $V(\mathcal{J}) \neq \emptyset$.

(c) Jos $x \in S$, $f \in \mathcal{I}(S)$, niin $f(x) = 0$; siispä $S \subset V(\mathcal{I}(S))$. Siten

$$\overline{S} \subset \overline{V(\mathcal{I}(S))} \stackrel{\text{(b)}}{=} V(\mathcal{I}(S)).$$

Kääntäen, jos $x \in X \setminus \overline{S}$, niin Urysohnin lemman mukaan on olemassa $f \in C(X)$, jolle $f(\overline{S}) = \{0\}$ ja $f(x) = 1$. Tällöin siis $f \in \mathcal{I}(S)$, joten $x \notin V(\mathcal{I}(S))$. Siten $V(\mathcal{I}(S)) \subset \overline{S}$.

(d) Jos $f \in \mathcal{J}$ ja $x \in V(\mathcal{J})$, niin $f(x) = 0$; siispä $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$. Siten

$$\overline{\mathcal{J}} \subset \overline{\mathcal{I}(V(\mathcal{J}))} \stackrel{\text{(a)}}{=} \mathcal{I}(V(\mathcal{J})).$$

Entä kääntäen? Olkoon $U \subset K$ avoin joukko, jolle $V(\mathcal{J}) \subset U$. Ota $V \subset K$ avoin, jolle $V(\mathcal{J}) \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Urysohnin lemman mukaan on olemassa "ykkösen approksimaatio" $i_{UV} \in C(K)$, jolle

$$0 \leq i_{UV} \leq 1, \quad i_{UV}(K \setminus U) = \{1\}, \quad i_{UV}(V) = \{0\}.$$

Jokaisella $x \in K \setminus V$ voidaan valita $g_x \in \mathcal{J}$, jolle $g_x(x) \neq 0$; jatkuvuuden nojalla on olemassa $U_x \in \mathcal{V}(x)$, jolle $0 \notin g_x(U_x)$. Koska $\{U_x \mid x \in K \setminus V\}$ on kompaktin joukon $K \setminus V$ avoin peite, on sillä äärellinen osapeite $\{U_{x_j}\}_{j=1}^n$. Tällöin

$$g_V = \sum_{j=1}^n |g_{x_j}|^2 = \sum_{j=1}^n \overline{g_{x_j}}\ g_{x_j} \in \mathcal{J},$$

ja $g_V(x) > 0$ kaikilla $x \in K \setminus V$. Määritellään

$$h_{UV}(x) := \begin{cases} \frac{i_{UV}(x)}{g_V(x)}, & x \in K \setminus V, \\ 0, & x \in V. \end{cases}$$

Nyt $h_{UV} \in C(K)$. Saadaan $i_{UV} = g_V\ h_{UV} \in \mathcal{J}$. Ota $f \in \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$ ja $\varepsilon > 0$. Määritellään avoin joukko $U_\varepsilon := f^{-1}(\mathbb{D}(0,\varepsilon))$, kun $\varepsilon > 0$. Olkoon $f_\varepsilon := f\ i_{U_\varepsilon U_{\varepsilon/2}} \in \mathcal{J}$. Nyt

$$\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon,$$

joten $f \in \overline{\mathcal{J}}$. On osoitettu, että $\mathcal{I}(V(\mathcal{J})) \subset \overline{\mathcal{J}}$ □

Huomautus. Helposti nähdään, että $\mathcal{I}(S)$ on itse asiassa suljettu involutiivinen ideaali. Yleisissäkin C*-algebroissa suljetut ideaalit ovat aina involutiivisia, ja todistus tälle seikalle on eräänlainen (d)-kohdan "ykkösen approksimaation" yleistys.

Huomautus. Tässä tehtävänanto on tarkoituksellisesti kirjoitettu algebrallisen geometrian Hilbertin ns. *Nullstellensatz*in (1893) muotoon. Tämä lause käsittelee polynomirenkaisiin liittyvää "geometriaa": ideaaliin $\mathcal{J}$ (Turun matemaattisella murteella *ihanne*) liittyy varieteetti $V(\mathcal{J})$ (*varisto*, engl. *variety*), eräänlainen "algebrallinen monisto" tai "nollakohtajoukko".