Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 2, viikko 5

1. Topologinen algebra on Hausdorff-avaruus. (Huomautus: Tässä on tarpeen se, että $\{0\}$ on suljettu ja se, että $(x, y) \mapsto x + y$ ja $x \mapsto -x$ ovat jatkuvia kuvauksia. Esimerkiksi tulon jatkuvuutta tai yhteenlaskun kommutativisuutta ei tarvita!)

   Todistus. Olkoon $\mathcal{A}$ topologinen algebra. Määritellään kuvaus

   $$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (x, y) \mapsto x - y,$$

   joka on jatkuva, sillä se saadaan yhdisteenä jatkuvista kuvauksista (topologisen algebran laskutoimituksista):

   $$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{(x,y)\mapsto(x,-y)}{\to} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{(a,b)\mapsto a+b}{\to} \mathcal{A}.$$

   Jos $x, y \in \mathcal{A}$, $x \neq y$, niin $f((x, y)) = x - y \neq 0$; siten

   $$\mathcal{A} \setminus \{0\} \in \mathcal{V}(f((x, y))),$$

   sillä $\{0\} \subset \mathcal{A}$ on suljettu. Koska f on jatkuva, on olemassa $W \in \mathcal{V}((x, y))$ siten, että $f(W) \subset \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Tulotopologian määritelmän nojalla on olemassa $U \in \mathcal{V}(x)$ ja $V \in \mathcal{V}(y)$, joille $U \times V \subset W$. Niinpä

   $$U - V = f(U \times V) \subset f(W) \subset \mathcal{A} \setminus \{0\}.$$

   Siis

   $$\{u - v \mid u \in U,\ v \in V\} \subset \mathcal{A} \setminus \{0\}$$

   eli $U \cap V = \emptyset$; täten $\mathcal{A}$ on Hausdorff-avaruus $\square$

2. Olkoon $\mathcal{A}$ algebra ja normiavaruus normilla $x \mapsto \|x\|$. Tällöin $\mathcal{A}$ on topologinen algebra jos ja vain jos
$$\exists C < \infty \ \forall x, y \in \mathcal{A}: \ \|xy\| \leq C \ \|x\| \ \|y\|.$$

Todistus. Normiavaruus yli kunnan $\mathbb{C}$ on aina topologinen vektoriavaruus. Oletetaan, että tehtävänannon epäyhtälö on voimassa jollakin $C < \infty$, ja että $x_n \to x$, $y_n \to y$. Tällöin on olemassa $M < \infty$ niin, että $\|x_n\| \leq M$ jokaisella n, joten

$$\begin{aligned}
\|x_n y_n - xy\| &= \|x_n y_n - x_n y + x_n y - xy\| \\
&\leq \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\| \\
&\leq C \ \|x_n\| \ \|y_n - y\| + C \ \|x_n - x\| \ \|y\| \\
&\leq C \ M \ \|y_n - y\| + C \ \|x_n - x\| \ \|y\| \\
&\to_{n\to\infty} 0;
\end{aligned}$$

niinpä tässä tapauksessa $\mathcal{A}$ on topologinen algebra.

Kääntäen, oletetaan, että $\mathcal{A}$ on topologinen algebra, jossa topologian määrää normi $x \mapsto \|x\|$. Algebran tulo on jatkuva pisteessä $(0,0) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, joten jos $\varepsilon > 0$, niin on olemassa $\delta > 0$, jolle

$$\forall x, y \in \mathcal{A}: \ \|x\|, \|y\| \leq \delta \ \Rightarrow \ \|xy\| \leq \varepsilon.$$

Jos $x = 0$ tai $y = 0$, niin triviaalisti $\|xy\| = 0 = \|x\| \ \|y\|$. Oletetaan siis, että $x \neq 0 \neq y$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|xy\| &= \left\| \frac{\delta x}{\|x\|} \ \frac{\delta y}{\|y\|} \right\| \ \delta^{-2} \ \|x\| \ \|y\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\delta^2} \ \|x\| \ \|y\|,
\end{aligned}$$

siis vakio $C = \varepsilon/\delta^2$ kelpaa □

Toinen todistus käänteiseen suuntaan. Kääntäen, oletetaan, että $\mathcal{A}$ on topologinen algebra, jossa topologian määrää normi $x \mapsto \|x\|$. **Oletetaan**, että jokaisella $n \geq 1$ on olemassa $x_n, y_n \in \mathcal{A}$ siten, että

$$\|x_n y_n\| > n \ \|x_n\| \ \|y_n\| \quad \text{ja} \quad \|x_n\| = 1 = \|y_n\|.$$

Silloin
$$1 = \|x_n\| \ \|y_n\| < n^{-1} \ \|x_n y_n\| = \left\| \frac{x_n}{\sqrt{n}} \ \frac{y_n}{\sqrt{n}} \right\| \to_{n\to\infty} 0,$$

koska tulo on jatkuva ja koska

$$\frac{x_n}{\sqrt{n}} \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{ja} \quad \frac{y_n}{\sqrt{n}} \to_{n\to\infty} 0;$$

mutta $1 \leq 0$ on **ristiriita** □

3. Olkoon K kompakti avaruus. Tällöin $C(K)$ erottelee (l. separoi) avaruuden X pisteet jos ja vain jos K on Hausdorff-avaruus.

Todistus. Oletetaan, että X on topologinen avaruus, jonka pisteet $C(X)$ erottelee. Jos $x, y \in X$, $x \neq y$, ota $f \in C(X)$, jolle $f(x) \neq f(y)$. Koska $\mathbb{C}$ on Hausdorff-avaruus, voidaan valita avoimet joukot $V_x, V_y \subset \mathbb{C}$, joille

$$f(x) \in V_x, \quad f(y) \in V_y, \quad V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Tällöin $U_x = f^{-1}(V_x) \in \mathcal{V}(x)$, $U_y = f^{-1}(V_y) \in \mathcal{V}(y)$ ja $U_x \cap U_y = \emptyset$. Täten X on Hausdorff-avaruus (eikä kompaktiusoletusta tässä edes tarvittu).

Kääntäen, oletetaan, että K on kompakti Hausdorff-avaruus, $x, y \in K$, $x \neq y$. Nyt $\{x\}, \{y\} \subset K$ ovat erillisiä ei-tyhjiä suljettuja joukkoja, joten Urysohnin lemma tarjoaa funktion $f \in C(K)$, jolle

$$f(x) = 0, \quad f(y) = 1.$$

Niinpä $C(K)$ erottelee kompaktin Hausdorff-avaruuden K pisteet $\square$

4. $C(K)$ on Banach-algebra normilla $f \mapsto \|f\| := \sup_{x \in K} |f(x)|$, kun K on kompakti avaruus.

Todistus. Tiedämme jo, että $C(K) \subset \mathcal{F}(K)$ on (ali)algebra.

Koska jatkuva reaaliarvoinen funktio kompaktilla avaruudella saavuttaa suurimman arvonsa, pätee $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty$. Ota $f, g \in C(K)$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Nyt

$$\|f+g\| = \sup_{x \in K} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x \in K}(|f(x)|+|g(x)|) \leq \sup_{x \in K} |f(x)| + \sup_{y \in K} |g(y)| = \|f\| + \|g\|,$$

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \in K} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in K} |f(x)| = |\lambda| \; \|f\|,$$

ja

$$\|f\| = 0 \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in K : \; f(x) = 0) \;\Leftrightarrow f = 0.$$

Kuvaus $f \mapsto \|f\|$ on täten normi. Lisäksi pätee

$$\|fg\| = \sup_{x \in K} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)| \sup_{y \in K} |g(y)| = \|f\| \; \|g\|$$

ja

$$\|\mathbb{I}\| = \sup_{x \in K} |\mathbb{I}(x)| = 1.$$

On vielä tarkistettava, että $C(K)$ on Banach-avaruus. Olkoon $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C(K)$ Cauchy-jono. Tällöin

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup_{y \in K} |f_m(y) - f_n(y)| = \|f_m - f_n\|,$$

joten $(f_n(x))_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ on Cauchy-jono jokaisella $x \in K$. Metrisen avaruuden $\mathbb{C}$ täydellisyyden nojalla on olemassa

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$$

jokaisella $x \in K$. Osoitetaan, että näin määritelty funktio $f : K \to \mathbb{C}$ on jatkuva (mielivaltaisessa) pisteessä $x \in K$. Ota $\varepsilon > 0$. Koska $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset C(K)$ on Cauchy-jono, on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ niin, että

$$m, n \geq n_\varepsilon \;\Rightarrow\; \|f_m - f_n\| < \varepsilon.$$

Niinpä

$$\|f - f_{n_\varepsilon}\| \leq \varepsilon.$$

Koska $f_{n_\varepsilon} \in C(K)$, on olemassa $U_\varepsilon \in \mathcal{V}(x)$, jolle

$$y \in U_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)| < \varepsilon.$$

Nyt kaikille $y \in U_\varepsilon$ pätee

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)| + |f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Siispä $f : K \to \mathbb{C}$ on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in K$, $f \in C(K)$ $\square$

5. Olkoon $\mathcal{A}$ topologinen algebra ja Banach-avaruus. Varusta se alkuperäisen normin $x \mapsto \|x\|$ kanssa ekvivalentilla Banach-algebranormilla $x \mapsto \|x\|'$. Muistutus: normien ekvivalenssi tarkoittaa

$$\exists C < \infty \; \forall x \in \mathcal{A} : \; C^{-1} \|x\| \leq \|x\|' \leq C \|x\|.$$

Ratkaisu. Tiedämme aiemmasta tehtävästä, että

$$\forall x, y \in \mathcal{A} : \; \|xy\| \leq C \|x\| \, \|y\|$$

jollakin vakiolla $C < \infty$. Kuten luennoilla, määritellään alkiolle $x \in \mathcal{A}$ kuvaus

$$m(x) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad m(x)y = xy.$$

Nyt kuvaus

$$m : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}), \quad x \mapsto m(x),$$

on homomorfismi, jolle

$$\begin{aligned}
\|m(x)\| &= \sup_{y \in \mathcal{A}: \; \|y\| \leq 1} \|xy\| \\
&\leq \sup_{y \in \mathcal{A}: \; \|y\| \leq 1} (C \|x\| \, \|y\|) = C \|x\| = C \|m(x)\mathbb{I}_{\mathcal{A}}\| \\
&\leq C \|m(x)\| \, \|\mathbb{I}_{\mathcal{A}}\|;
\end{aligned}$$

saadaan siis

$$\|m(x)\| \leq C \|x\| \leq C \|\mathbb{I}_{\mathcal{A}}\| \, \|m(x)\|$$

eli

$$\|\mathbb{I}_{\mathcal{A}}\|^{-1} \|x\| \leq \|m(x)\| \leq C \|x\|.$$

Täten normit $x \mapsto \|x\|$ ja $x \mapsto \|x\|' := \|m(x)\|$ ovat ekvivalentit! Tässä siis $\|x\|'$ on sama kuin operaattorin $m(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ operaattorinormi.

Tiedämme, että operaattorinormi tekee algebrasta $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ Banach-algebran, jonka Banach-alialgebra $m(\mathcal{A})$ on, joten todistus on valmis. Harjoituksen vuoksi kuitenkin todistetaan tulon ja ykkösalkion normivaatimukset eksplisiittisesti:

$$\|xy\|' = \|m(xy)\| = \|m(x)m(y)\| \leq \|m(x)\| \, \|m(y)\| = \|x\|' \, \|y\|'$$

ja

$$\|\mathbb{I}_{\mathcal{A}}\|' = \sup_{y \in \mathcal{A}: \; \|y\| \leq 1} \|\mathbb{I}_{\mathcal{A}} y\| = \sup_{y \in \mathcal{A}: \; \|y\| \leq 1} \|y\| = 1.$$

Siten $x \mapsto \|x\|'$ on alkuperäisen normin kanssa ekvivalentti Banach-algebranormi $\square$

6. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra ja $x, y \in \mathcal{A}$ siten, että

$$xy = yx, \quad x^2 = x, \quad y^2 = y.$$

Osoita, että joko $x = y$ tai $\|x - y\| \geq 1$. Anna esimerkki Banach-algebrasta $\mathcal{A}$ ja alkioista $x, y \in \mathcal{A}$ niin, että $x^2 = x \neq y = y^2$ ja $\|x - y\| < 1$ (vinkki: algebran dimension ei tarvitse olla kovinkaan korkea, ja geometrisesta intuitiostakin saattaa olla hyötyä :)

Ratkaisu. Lasketaan

$$\begin{aligned}
(x-y)^3 &\overset{xy=yx}{=} x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\
&\overset{x^2=x,\ y^2=y}{=} x - 3xy + 3xy - y \\
&= x - y,
\end{aligned}$$

joten

$$\|x - y\| = \|(x-y)^3\| \leq \|x - y\|^3.$$

Saadaan joko $x = y$ tai $\|x - y\|^2 \geq 1$.

Sitten esimerkki: Voisimme aivan hyvin tarkastella projektioita algebroissa yli kunnan $\mathbb{C}$, mutta havainnollisuuden vuoksi otamme käsittelyyn algebran yli kunnan $\mathbb{R}$. Olkoon

$$\mathcal{A} = L(\mathbb{R}^2) = \left\{ A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid A \text{ lineaarinen} \right\},$$

siis lineaarikuvausten $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ algebra. Olkoon $\phi \in \mathbb{R}$, ja $x_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on ortogonaaliprojektio aliavaruudelle

$$V_\phi = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

(piirrä kuva!) eli eksplisiittisesti

$$x_\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \left(\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} = (a\cos(\phi) + b\sin(\phi)) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Nyt $x_\phi^2 = x_\phi$, mutta jos esim. $0 \leq \phi, \psi < \pi/2$, $\phi \neq \psi$, niin

$$0 < \|x_\phi - x_\psi\| < |\phi - \psi| \to_{\phi \to \psi} 0.$$