Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 1, viikko 4

1. Olkoon $\mathcal{A}$ algebra ja $x, y \in \mathcal{A}$.

   (a) Jos x, xy ovat kääntyviä, niin y on kääntyvä.

   (b) Jos xy, yx ovat kääntyviä, niin x, y ovat kääntyviä.

   (c) Anna esimerkki algebrasta $\mathcal{A}$ ja alkioista $x, y \in \mathcal{A}$, joille $xy = \mathbb{I}_{\mathcal{A}} \neq yx$. Osoita, että tällöin $(yx)^2 = yx \neq 0$.

Ratkaisu. Huomaa, että jos $x, y \in \mathcal{A}$ ovat kääntyviä, niin $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, sillä

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = x\mathbb{I}x^{-1} = xx^{-1} = \mathbb{I}$$

ja vastaavasti

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}\mathbb{I}y = y^{-1}y = \mathbb{I}.$$

(a) Olkoot $x, xy \in \mathcal{A}$ kääntyviä. Jos y olisi kääntyvä, niin $y^{-1} = y^{-1}x^{-1}x = (xy)^{-1}x$; kokeillaanpa:

$$((xy)^{-1}x)y = (xy)^{-1}(xy) = \mathbb{I},$$

$$y((xy)^{-1}x) = (x^{-1}x)y(xy)^{-1}x = x^{-1}((xy)(xy)^{-1})x = x^{-1}x = \mathbb{I}.$$

(b) Olkoot $xy, yx \in \mathcal{A}$ kääntyviä. Aivan kuten (a)-kohdassa, veikkaamme, että $y^{-1} = (xy)^{-1}x$ — ja näinhän onkin:

$$((xy)^{-1}x)y \overset{\text{(a)}}{=} \mathbb{I},$$

$$y((xy)^{-1}x) = y(xy)^{-1}x((yx)(yx)^{-1}) = y((xy)^{-1}(xy))x(yx)^{-1} = (yx)(yx)^{-1} = \mathbb{I}.$$

Symmetrian nojalla todetaan, että on oltava $x^{-1} = (yx)^{-1}y$.

(c) Oletetaan, että $xy = \mathbb{I} \neq yx$. Tällöin

$$(yx)^2 = (yx)(yx) = y(xy)x = y\mathbb{I}x = yx;$$

koska

$$0 \neq \mathbb{I} = \mathbb{I}\mathbb{I} = (xy)(xy) = x(yx)y,$$

on oltava $yx \neq 0$. Esimerkki algebrasta, jossa tämä on mahdollista, on lineaarioperaattorien algebra $\mathcal{A} := L(\mathcal{F}(\mathbb{N})) = \{A : \mathcal{F}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}(\mathbb{N}) \mid A \text{ lineaarinen}\}$, missä $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ on funktioiden $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ vektoriavaruus. Määritellään $x, y \in \mathcal{A}$ siirto-operaattoreiksi

$$(xf)(n) := f(n+1), \quad (yf)(0) := 0 \quad \text{ja} \quad (yf)(n+1) := f(n)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt $(xy)f = f \neq (yx)f$ $\square$

2. Olkoon $\mathcal{A}$ algebra ja $x, y \in \mathcal{A}$.

   (a) $\mathbb{I} - yx$ on kääntyvä jos ja vain jos $\mathbb{I} - xy$ on kääntyvä.

   (b) $\sigma(yx) \subset \sigma(xy) \cup \{0\}$.

   (c) Jos x on kääntyvä, niin $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

Todistus.

(a) Oletetaan, että $\mathbb{I} - xy \in \mathcal{A}$ on kääntyvä. Formaalin potenssisarjan (ns. Carl Neumann -sarjan) avulla saadaan yrite alkion $\mathbb{I} - yx$ mahdolliselle käänteisalkiolle:

$$(\mathbb{I} - yx)^{-1} \sim \sum_{j=0}^{\infty} (yx)^j = \mathbb{I} + y \left(\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \right) x \sim \mathbb{I} + y(\mathbb{I} - xy)^{-1} x.$$

Ja toden totta,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{I} - yx)\ (\mathbb{I} + y(\mathbb{I} - xy)^{-1}x) &= \mathbb{I} - yx + y(\mathbb{I} - xy)^{-1}x - yxy(\mathbb{I} - xy)^{-1}x \\
&= \mathbb{I} - y(\mathbb{I} - (\mathbb{I} - xy)^{-1} + xy(\mathbb{I} - xy)^{-1})x \\
&= \mathbb{I} - y(\mathbb{I} - (\mathbb{I} - xy)(\mathbb{I} - xy)^{-1})x \\
&= \mathbb{I} - y0x \\
&= \mathbb{I},
\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}
(\mathbb{I} + y(\mathbb{I} - xy)^{-1}x)\ (\mathbb{I} - yx) &= \mathbb{I} - yx + y(\mathbb{I} - xy)^{-1}x - y(\mathbb{I} - xy)^{-1}xyx \\
&= \mathbb{I} - y(\mathbb{I} - (\mathbb{I} - xy)^{-1} + (\mathbb{I} - xy)^{-1}xy)x \\
&= \mathbb{I} - y(\mathbb{I} - (\mathbb{I} - xy)^{-1}(\mathbb{I} - xy))x \\
&= \mathbb{I} - y0x \\
&= \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(yx) &\Leftrightarrow \nexists(\lambda\mathbb{I} - yx)^{-1} \\
&\overset{(a)}{\Rightarrow} \lambda = 0 \quad \text{tai} \quad \nexists(\lambda\mathbb{I} - xy)^{-1} \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \sigma(xy) \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

(c) Olkoon $x \in \mathcal{A}$ kääntyvä; nyt (ks. tehtävän 1 ratkaisu)

$$\exists (xy)^{-1} \;\Leftrightarrow\; \exists y^{-1} \;\Leftrightarrow\; \exists (yx)^{-1}$$

eli

$$0 \in \sigma(xy) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma(y) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma(yx).$$

Siten (b)-kohdan nojalla $\sigma(yx) = \sigma(xy)$ $\square$

3. Olkoon $\mathcal{A}$ matriisien $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ (missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) muodostama joukko.

   (a) Näytä, että $\mathcal{A}$ on kommutatiivinen algebra.

   (b) Luokittele (isomorfiaa vaille) kaikki kaksidimensioiset algebrat. (Vinkki: todista, että kaksidimensioisessa algebrassa on oltava joko $\exists x \neq 0 : \ x^2 = 0$ tai $\exists x \notin \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\} : \ x^2 = \mathbb{I}$.)

Ratkaisu.

(a) Merkitään $x(\alpha,\beta) := \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$, jolloin $\mathcal{A} = \{x(\alpha,\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$. Olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $x(\alpha,\beta), x(\gamma,\delta) \in \mathcal{A}$. Varustetaan $\mathcal{A}$ matriisien tavallisella vektoriavaruusrakenteella ja tulolla,

$$\begin{aligned} \lambda x(\alpha,\beta) &= x(\lambda\alpha, \lambda\beta) \in \mathcal{A}, \\ x(\alpha,\beta) + x(\gamma,\delta) &= x(\alpha+\gamma, \beta+\delta) \in \mathcal{A}, \\ x(\alpha,\beta)\ x(\gamma,\delta) = x(\gamma,\delta)\ x(\alpha,\beta) &= x(\alpha\gamma, \alpha\delta + \beta\gamma) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Kertolaskun ykkösalkiona on $\mathbb{I}_{\mathcal{A}} = x(1,0)$, identiteettimatriisi. Kyseessä on siis kommutatiivinen algebra.

(b) (a)-kohdan algebra $\mathcal{A}$ on kaksidimensioinen, ja siinä pätee

$$x(0,\beta)^2 = 0$$

jokaisella $\beta \in \mathbb{C}$. Varustetaan vektoriavaruus $\mathcal{B} = \mathbb{C}^2$ algebrarakenteella, jossa kertolaskuna on

$$((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) \mapsto (\alpha\gamma, \beta\delta).$$

Huomaa, että $\mathcal{B} \cong \mathcal{F}(\{1,2\})$, missä $\mathcal{F}(\{1,2\})$ on funktioiden $f : \{1,2\} \to \mathbb{C}$ algebra. Algebrassa $\mathcal{B}$ pätee

$$(\alpha,\beta)^2 = 0 \ \Leftrightarrow (\alpha,\beta) = 0,$$

joten $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ eivät ole isomorfisia algebroja. Algebrassa $\mathcal{B}$ pätee myös

$$(1,-1)^2 = (1,1) = \mathbb{I}_{\mathcal{B}},$$

vaikka $(1,-1) \notin \{-\mathbb{I}_{\mathcal{B}}, \mathbb{I}_{\mathcal{B}}\}$. Olkoon $\mathcal{C}$ mikä tahansa kaksidimensioinen algebra, ja olkoon $\{\mathbb{I}, x\}$ sen vektoriavaruuskanta. Tällöin

$$x^2 = \lambda\mathbb{I} + \mu x$$

joillakin $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, joten

$$(x - \mathbb{I}\mu/2)^2 = (\lambda + \mu^2/4)\mathbb{I}.$$

Jos nyt $\lambda + \mu^2/4 = 0$ ja $y := x - \mathbb{I}\mu/2$, niin lukija voi helposti tarkistaa, että

$$\mathcal{C} \to \mathcal{A}, \quad (\alpha\mathbb{I} + \beta y) \mapsto x(\alpha,\beta),$$

on algebraisomorfismi. Jos taas $\lambda + \mu^2/4 \neq 0$, niin $(\nu^{-1}(x - \mathbb{I}\mu/2))^2 = \mathbb{I}$ (missä $\nu^2 = \lambda + \mu^2/4$), vaikka $y := \nu^{-1}(x - \mathbb{I}\mu/2) \notin \{-\mathbb{I}, \mathbb{I}\}$; taas lukija voi tarkistaa, että

$$\mathcal{C} \to \mathcal{B}, \quad (\alpha\mathbb{I} + \beta y) \mapsto (\alpha+\beta, \alpha-\beta),$$

on algebraisomorfismi. Siten $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat isomorfiaa vaille ainoat mahdolliset kaksidimensioiset algebrat (yli kunnan $\mathbb{C}$) $\square$

4. Olkoot $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebroja ja $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismi. Tällöin

   (a) $\phi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ on alialgebra,

   (b) $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathcal{A}$ on ideaali,

   (c) $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\phi) \cong \phi(\mathcal{A})$.

Todistus.

(a) Tämä väite seuraa suoraan siitä, että ϕ kunnioittaa algebrarakennetta:

$$\lambda\phi(x) = \phi(\lambda x), \quad \phi(x) + \phi(y) = \phi(x+y), \quad \phi(x)\phi(y) = \phi(xy), \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B}} = \phi(\mathbb{I}_{\mathcal{A}}),$$

missä $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $x, y \in \mathcal{A}$.

(b) Ota $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathrm{Ker}(\phi)$ ja $z \in \mathcal{A}$. Nyt

$$\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x) = \lambda 0 = 0,$$

joten $\lambda x \in \mathrm{Ker}(\phi)$;

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) = 0 + 0 = 0,$$

joten $x + y \in \mathrm{Ker}(\phi)$;

$$\phi(xz) = \phi(x)\phi(z) = 0\phi(z) = 0, \quad \phi(zx) = \phi(z)\phi(x) = \phi(z)0 = 0,$$

joten $xz, zx \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Täten $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathcal{A}$ on ideaali.

(c) Olkoon $[x] := x + \mathrm{Ker}(\phi) = \{x + k \mid k \in \mathrm{Ker}(\phi)\}$, kun $x \in \mathcal{A}$. Jos $x, y \in \mathcal{A}$, niin

$$\phi(x) = \phi(y) \;\Leftrightarrow\; 0 = \phi(x) - \phi(y) = \phi(x-y) \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathrm{Ker}(\phi) \;\Leftrightarrow\; [x] = [y],$$

joten kuvaus

$$\psi : \mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\phi) \to \phi(\mathcal{A}), \quad [x] \mapsto \phi(x),$$

on hyvin määritelty injektio. Toki ψ on triviaalisti myös surjektio. Entä onko se lisäksi homomorfismi? Olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $[x], [y] \in \mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\phi)$. Pätee

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda[x]) = \psi([\lambda x]) = \phi(\lambda x) &= \lambda\phi(x) = \lambda\psi([x]), \\
\psi([x]+[y]) = \psi([x+y]) = \phi(x+y) &= \phi(x) + \phi(y) = \psi([x]) + \psi([y]), \\
\psi([x][y]) = \psi([xy]) = \phi(xy) &= \phi(x)\phi(y) = \psi([x])\psi([y]), \\
\psi(\mathbb{I}_{\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\phi)}) = \psi([\mathbb{I}_{\mathcal{A}}]) = \phi(\mathbb{I}_{\mathcal{A}}) &= \mathbb{I}_{\mathcal{B}} = \mathbb{I}_{\phi(\mathcal{A})}.
\end{aligned}$$

On todistettu, että ψ on isomorfismi $\square$

5. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Olkoon $f : X \to Y$ ja $x \in X$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(a) f on jatkuva pisteessä x.

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X :\ d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

(c) $x_n \to x \ \Rightarrow\ f(x_n) \to f(x)$.

Todistus (b)⇒(a)⇒(c)⇒(b). Oletetaan (b). Ota $V \in \mathcal{V}(f(x))$. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $B(f(x), \varepsilon) \subset V$. Nyt (b):n nojalla

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset V$$

jollakin $\delta > 0$; siis (b)⇒(a).

Oletetaan (a). Olkoon $x_n \to x$. Ota $\varepsilon > 0$. Tällöin (a):n nojalla $f(U) \subset B(f(x), \varepsilon)$ jollakin $U \in \mathcal{V}(x)$. Ota $\delta > 0$ niin, että $B(x, \delta) \subset U$. On olemassa $n_\delta \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in B(x, \delta)$, kun $n > n_\delta$. Siten

$$n > n_\delta \ \Rightarrow\ f(x_n) \in f(B(x, \delta)) \subset f(U) \subset B(f(x), \varepsilon),$$

joten $f(x_n) \to f(x)$. Siis (a)⇒(c).

Oletetaan, ettei (b) päde eli että

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 :\ f(B(x, \delta)) \not\subset B(f(x), \varepsilon).$$

Jokaisella $n \in \mathbb{Z}^+$ valitse $x_n \in B(x, 1/n)$ niin, että $f(x_n) \notin B(f(x_n), \varepsilon)$. Täten $x_n \to x$, mutta $f(x_n) \not\to f(x)$, joten (c) ei päde; siis (c)⇒(b) □

Todistus (b)⇒(c)⇒(a)⇒(b). Oletetaan (b). Olkoon $x_n \to x$. Ota $\varepsilon > 0$. Kohdan (b) nojalla on olemassa $\delta > 0$ niin, että $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. On olemassa $n_\delta \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in B(x, \delta)$, kun $n > n_\delta$. Siten

$$n > n_\delta \ \Rightarrow f(x_n) \in f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon),$$

joten $f(x_n) \to f(x)$. Siis (b)⇒(c).

Oletetaan, ettei (a) päde, vaan

$$\exists V \in \mathcal{V}(f(x))\ \forall U \in \mathcal{V}(x) :\ f(U) \not\subset V.$$

Jokaisella $n \in \mathbb{Z}^+$ ota $x_n \in B(x, 1/n)$ siten, että $f(x_n) \notin V$. Nyt $x_n \to x$, mutta on olemassa $\varepsilon > 0$, jolle $f(x_n) \notin B(f(x), \varepsilon) \subset V$ jokaisella n. Niinpä $f(x_n) \not\to f(x)$, joten (c) ei päde; siis (c)⇒(a).

Oletetaan (a). Ota $\varepsilon > 0$. Tällöin $f(U) \subset B(f(x), \varepsilon)$ jollakin $U \in \mathcal{V}(x)$. On olemassa $\delta > 0$ niin, että $B(x, \delta) \subset U$, joten

$$f(B(x, \delta)) \subset f(U) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

Siis (a)⇒(b) □

6. Olkoon X topologinen avaruus. Osoita, että $C(X)$ on algebra.

Todistus 1 (elegantti). Tiedämme, että funktioiden $f : X \to \mathbb{C}$ joukko $\mathcal{F}(X)$ muodostaa algebran (luonnollisilla pisteittäisillä laskutoimituksilla). On osoitettava, että $C(X) \subset \mathcal{F}(X)$ on alialgebra. Vakiofunktiot topologisten avaruuksien välillä ovat toki aina jatkuvia, joten $\mathbb{I} = (x \mapsto 1) \in C(X)$.

Lukija voi todistaa, että jatkuvien kuvauksien yhdistetty kuvaus on jatkuva. Ota $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $f, g \in C(X)$. Nyt $\lambda f \in C(X)$, se saadaan jatkuvien kuvausten yhdisteenä:

$$\lambda f : \ X \stackrel{x \mapsto f(x)}{\longrightarrow} \mathbb{C} \stackrel{\alpha \mapsto \lambda\alpha}{\longrightarrow} \mathbb{C}.$$

Vastaavasti $f + g \in C(X)$, sillä kompleksilukujen yhteenlasku on jatkuva ja

$$f + g : \ X \stackrel{x \mapsto (f(x), g(x))}{\longrightarrow} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \stackrel{(\alpha,\beta) \mapsto \alpha+\beta}{\longrightarrow} \mathbb{C};$$

avaruudessa $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ käytetään siis tulotopologiaa. Aivan vastaavasti todistetaan, että $fg \in C(X)$ $\square$

Huomautus. Lukija voi helposti osoittaa, että jos $f \in C(X)$ ja $0 \notin f(X)$, niin $1/f = (x \mapsto f(x)^{-1}) \in C(X)$.

Todistus 2 (raaka). Kuten todistuksessa 1, riittää osoittaa, että $C(X) \subset \mathcal{F}(X)$ on alialgebra. Vakiofunktio $\mathbb{I} = (x \mapsto 1) \in C(X)$. Olkoon $x \in X$ mielivaltainen. Ota $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $f, g \in C(X)$.

Jos $\lambda = 0$, niin $\lambda f = (x \mapsto 0) = 0 \in C(X)$; oletetaan, että $\lambda \neq 0$. Ota avoin $V \subset \mathbb{C}$ siten, että $\lambda f(x) \in V$. Nyt $\lambda^{-1}V = \{\lambda^{-1}v \mid v \in V\} \subset \mathbb{C}$ on avoin; koska $f(x) \in \lambda^{-1}V$ ja $f \in C(X)$, on olemassa $U \in \mathcal{V}(x)$ siten, että $f(U) \subset \lambda^{-1}V$. Näin ollen $(\lambda f)(U) \subset \lambda\lambda^{-1}V = V$. Siispä $\lambda f \in C(X)$.

Ota avoin $V \subset \mathbb{C}$ siten, että $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in V$. Koska kompleksilukujen yhteenlasku on jatkuva, on olemassa avoimet $V_f, V_g \subset \mathbb{C}$ siten, että $f(x) \in V_f$, $g(x) \in V_g$ ja $V_f + V_g \subset V$. Koska $f, g \in C(X)$, on olemassa $U_f, U_g \in \mathcal{V}(x)$ siten, että $f(U_f) \subset V_f$ ja $g(U_g) \subset V_g$. Nyt $U := U_f \cap U_g \in \mathcal{V}(x)$ ja

$$(f + g)(U) = \bigcup_{y \in U} (f(y) + g(y)) \subset f(U) + g(U) \subset f(U_f) + g(U_g) \subset V_f + V_g \subset V.$$

Siispä $f + g \in C(X)$. Seikka $fg \in C(X)$ todistetaan aivan vastaavaan tapaan $\square$