Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 5, viikko 8

1. Todista väitteet:
   (a) Involutiivisella Banach-algebralla voi olla vain yksi C*-normi.
   (b) C*-algebrahomomorfismi on aina jatkuva ja normiltaan 1.
   (c) Injektiivinen C*-algebrahomomorfismi on isometria. (Vinkki: Gelfand-muunnos...)

2. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ Banach-alialgebra ja $x \in \mathcal{B}$. Todista väittämät:
   (a) $G(\mathcal{B})$ on suljettu ja avoin avaruuden $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ osajoukko.
   (b) $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ ja $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x)$.
   (c) Jos $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ on yhtenäinen, niin $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.

3. Olkoon $\mathcal{A}$ C*-algebra, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ C*-alialgebra ja $x \in \mathcal{B}$. Osoita, että
   $$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x).$$
   (Vinkki: käsittele ensin tapaus $x^* = x$ edellisen tehtävän avulla...)

4. Olkoon $\mathcal{A}$ C*-algebra, $x \in \mathcal{A}$, $x^*x = xx^*$, $f \in C(\sigma(x))$ ja $g \in C(f(\sigma(x)))$. Osoita, että
   (a) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$,
   (b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

5. Todista väitteet:
   (a) Jos topologisella avaruudella on numeroituva kanta, niin se on separoituva.
   (b) Metrisellä topologialla on numeroituva kanta jos ja vain jos avaruus on separoituva.

6. Varustetaan joukko
   $$X = \{f : [0,1] \to [0,1] \mid x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\}$$
   tuloavaruudesta $[0,1]^{[0,1]}$ perityllä topologialla. Osoita, että näin saadaan ei-metristyvä separoituva kompakti Hausdorff-avaruus.

Bonustehtävä! Olkoon $x \mapsto x^*$ C*-algebran $\mathcal{A}$ involuutio ja $y \mapsto y^\star$ C*-algebran $\mathcal{B}$ involuutio. Oletetaan, että Banach-algebroina $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat samat, ja että pätee

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 = \|x^\star x\|$$

jokaisella $x \in \mathcal{A}$. Osoita, että $x^* = x^\star$ jokaisella $x \in \mathcal{A}$.