Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 3, viikko 6

1. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra. Alkio $x \in \mathcal{A}$ on *topologinen nollantekijä*, jos on olemassa jono $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ niin, että $\|y_n\| = 1$ jokaisella n ja
$$\lim_{n\to\infty} xy_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n x.$$
   (a) Jos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset G(\mathcal{A})$ ja $x_n \to x \in \partial G(\mathcal{A})$, niin $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.
   (b) Osoita, että joukon $\partial G(\mathcal{A})$ alkiot ovat topologisia nollantekijöitä.
   (c) Minkälaisissa Banach-algebroissa 0 on ainoa topologinen nollantekijä?

2. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra. Osoita, että jos
$$\exists C < \infty \ \forall x, y \in \mathcal{A} : \ \|x\| \, \|y\| \leq C \, \|xy\|,$$
niin $\mathcal{A}$ ja $\mathbb{C}$ ovat isometrisesti isomorfisia Banach-algebroja.

3. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra ja $x, y \in \mathcal{A}$. Todista:
   (a) $\rho(xy) = \rho(yx)$.
   (b) Jos $xy = yx$, niin $\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y)$.
   (c) Jos x on nilpotentti (eli $x^k = 0$ jollakin $k \in \mathbb{N}$), niin $\sigma(x) = \{0\}$.

4. Olkoon $\mathcal{A}$ algebra. Osajoukon $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ *kommutantti* on
$$\Gamma(\mathcal{S}) := \{x \in \mathcal{A} \mid \forall y \in \mathcal{S} : \ xy = yx\}.$$
Todista:
   (a) $\Gamma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$ on alialgebra; jos $\mathcal{A}$ on topologinen algebra, niin $\Gamma(\mathcal{S})$ on suljettu.
   (b) $\mathcal{S} \subset \Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))$.
   (c) Jos $xy = yx$ kaikilla $x, y \in \mathcal{S}$, niin $\Gamma(\Gamma(\mathcal{S})) \subset \mathcal{A}$ on kommutatiivinen alialgebra, jossa $\sigma_{\Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))}(z) = \sigma_{\mathcal{A}}(z)$ jokaisella $z \in \Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))$.

5. Olkoon X topologinen avaruus. Määritellään $C \subset X \times X$ siten, että
$$(x, y) \in C \quad \Longleftrightarrow \quad \forall f \in C(X) : \ f(x) = f(y).$$
Todista:
   (a) C on ekvivalenssirelaatio joukossa X.
   (b) Joukkojen $C(X)$ ja $C(X/C)$ välillä on luonnollinen bijektiivinen vastaavuus.
   (c) X/C on Hausdorff-avaruus.
   (d) Jos X on kompakti Hausdorff-avaruus, niin $X \cong X/C$.

6. Olkoot $\mathcal{A}_j$ topologisia algebroja jokaisella $j \in J$. Varusta $\mathcal{A} := \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j$ topologisen algebran rakenteella.