Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 2, viikko 5

1. Topologinen algebra on Hausdorff-avaruus. (Huomautus: Tässä on tarpeen se, että $\{0\}$ on suljettu ja se, että $(x,y) \mapsto x+y$ ja $x \mapsto -x$ ovat jatkuvia kuvauksia. Esimerkiksi tulon jatkuvuutta tai yhteenlaskun kommutativisuutta ei tarvita!)

2. Olkoon $\mathcal{A}$ algebra ja normiavaruus normilla $x \mapsto \|x\|$. Tällöin $\mathcal{A}$ on topologinen algebra jos ja vain jos
$$\exists C < \infty \; \forall x, y \in \mathcal{A} : \; \|xy\| \leq C \; \|x\| \; \|y\|.$$

3. Olkoon K kompakti avaruus. Tällöin $C(K)$ erottelee (l. separoi) avaruuden X pisteet jos ja vain jos K on Hausdorff-avaruus.

4. $C(K)$ on Banach-algebra normilla $f \mapsto \|f\| := \sup_{x \in K} |f(x)|$, kun K on kompakti avaruus.

5. Olkoon $\mathcal{A}$ topologinen algebra ja Banach-avaruus. Varusta se alkuperäisen normin $x \mapsto \|x\|$ kanssa ekvivalentilla Banach-algebranormilla $x \mapsto \|x\|'$. Muistutus: normien ekvivalenssi tarkoittaa
$$\exists C < \infty \; \forall x \in \mathcal{A} : \; C^{-1} \; \|x\| \leq \|x\|' \leq C \; \|x\|.$$

6. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra ja $x, y \in \mathcal{A}$ siten, että
$$xy = yx, \quad x^2 = x, \quad y^2 = y.$$
Osoita, että joko $x = y$ tai $\|x - y\| \geq 1$. Anna esimerkki Banach-algebrasta $\mathcal{A}$ ja alkioista $x, y \in \mathcal{A}$ niin, että $x^2 = x \neq y = y^2$ ja $\|x - y\| < 1$ (vinkki: algebran dimension ei tarvitse olla kovinkaan korkea, ja geometrisesta intuitiostakin saattaa olla hyötyä :)