Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 1, viikko 4

1. Olkoon $\mathcal{A}$ algebra ja $x, y \in \mathcal{A}$.
   (a) Jos x, xy ovat kääntyviä, niin y on kääntyvä.
   (b) Jos xy, yx ovat kääntyviä, niin x, y ovat kääntyviä.
   (c) Anna esimerkki algebrasta $\mathcal{A}$ ja alkioista $x, y \in \mathcal{A}$, joille $xy = \mathbb{I}_{\mathcal{A}} \neq yx$. Osoita, että tällöin $(yx)^2 = yx \neq 0$.

2. Olkoon $\mathcal{A}$ algebra ja $x, y \in \mathcal{A}$.
   (a) $\mathbb{I} - yx$ on kääntyvä jos ja vain jos $\mathbb{I} - xy$ on kääntyvä.
   (b) $\sigma(yx) \subset \sigma(xy) \cup \{0\}$.
   (c) Jos x on kääntyvä, niin $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

3. Olkoon $\mathcal{A}$ matriisien
   $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$
   muodostama algebra.
   (a) Näytä, että $\mathcal{A}$ on kommutatiivinen algebra.
   (b) Luokittele (isomorfiaa vaille) kaikki kaksidimensioiset algebrat. (Vinkki: todista, että kaksidimensioisessa algebrassa on oltava joko $\exists x \neq 0 : \ x^2 = 0$ tai $\exists x \notin \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\} : \ x^2 = \mathbb{I}$.)

4. Olkoot $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebroja ja $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismi. Tällöin
   (a) $\phi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ on alialgebra,
   (b) $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathcal{A}$ on ideaali,
   (c) $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\phi) \cong \phi(\mathcal{A})$.

5. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Olkoon $f : X \to Y$ ja $x \in X$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
   (a) f on jatkuva pisteessä x.
   (b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in X : \ d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
   (c) $x_n \to x \ \Rightarrow \ f(x_n) \to f(x)$.

6. Olkoon X topologinen avaruus. Osoita, että $C(X)$ on algebra.