Mat-1.117 Numeerinen analyysi B kevät -95

Apiola/Korvola

2. (ylim.) välikoe 22.5. 1995, Tomi Pajunen

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Selvitä graafisen tarkastelun avulla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ e^x - y = 0 \end{cases}$$

ratkaisujen lukumäärä ja likiarvot. Tarkenna kutakin ratkaisua Newtonin menetelmällä. Yksi kierros kutakin juurta kohden riittää. Numeeristen laskujen sijasta voit halutessasi kirjoittaa MATLAB-komennot, joilla laskeminen sujuisi. Jos näin teet, tulee komentojen olla jokseenkin virheetöntä, lähes koneen hyväksymää MATLAB-koodia.

2. Olkoon $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$. Laske likiarvo $f(1.03)$:lle käyttäen pisteisiin $x_0 = 1, x_1 = 1.05, x_2 = 1.07$ asetettua interpolaatiopolynomia. Voit käyttää hyväksesi seuraavia MATLAB-rivejä:

```
>> x=[1,1.05,1.07];
>> f=3*x.*exp(x)-exp(2*x)
f =
    0.7658    0.8354    0.8589
```

Arvioi virheelle yläraja interpolaatiovirhekaavan avulla.

Vihje: Derivaatan $|f^{(n+1)}|$ maksimin sijainti on helppo selvittää katsomalla $f^{(n+2)}$:n merkkiä

3. - a) Määritä vakiot x_0, x_1, A_0, A_1 siten, että likiarvokaava $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq A_0 x_0 + A_1 x_1$ on tarkka mahdollisimman korkea-asteisille polynomeille f. Muodosta ensin asianmukainen yhtälöryhmä ja totea sitten, että $x_0 = -1/\sqrt{3}, x_1 = 1/\sqrt{3}, A_0 = A_1 = 1$ toteuttaa ryhmän.
   - b) Laske likiarvo $\ln 2$:lle soveltamalla a)-kohdan kaavaa ja sopivaa muuttujanvaihdosta integraaliin $\int_0^1 \frac{dt}{t+1}$. Kuinka monta oikeaa numeroa saat?

4. Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = t^2 - x, \quad x(0) = 2$ Eulerin menetelmällä. välillä $[0, 0.2]$ käyttäen a.) askelpitutta $h = 0.2$ (vain yksi jakoväli) ja b.) askelpituutta $h = 0.1$ (kaksi jakoväliä).

   Vertaa ratkaisua tarkkaan ratkaisuun pisteessä $t = 0.2$. Käyttäytyykö virhe odotetulla tavalla, kun askelpituus puolitetaan?

Mukana saa olla :

- Kaavakokoelma (Pentikäinen, MAOL (tuskin tarpeen)) mutta ei käsikirjaa, kuten BETA
- MATLAB-opas (Primer ja/tai Kivelä, tms.). Muuta kirjallisuutta tai prujuja ei!!
- standardilaskin (ei ohjelmoitava).