Mat-1.117 Numeerinen analyysi B

Apiola

Tentti 14.5.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Olkoon $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$.

   - Laske likiarvo $f(1.03)$:lle käyttäen pisteisiin $x_0 = 1, x_1 = 1.05, x_2 = 1.07$ asetettua interpolaatiopolynomia. Voit käyttää hyväksesi seuraavia MATLAB-rivejä:

     ```
     >> x=[1,1.05,1.07];
     >> f=3*x.*exp(x)-exp(2*x)
     f =
         0.7658    0.8354    0.8589
     ```

     (3 p.)
   - Arvioi virheelle yläraja interpolaatiovirhekaavalla. [1]
     Vihje: Derivaatan $|f^{(n+1)}|$ maksimin sijainti on helppo selvittää katsomalla $f^{(n+2)}$:n merkkiä. **(3 p.)**

2. - Suorita yksi askel Newtonin menetelmää systeemin

     $$\begin{cases} 15\,x + y^2 - 4z = 13 \\ x^2 + 10y - z = 11 \\ y^2 - 25z = -22 \end{cases}$$

     ratkaisemiseksi. Valitse alkupisteeksi $(1, 1, 1)$. **(4 p.)**
   - Residuaalilla pisteessä $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tarkoitetaan vektoria $op - vp(p_0)$ (op = oikea puoli, vp=vasen puoli). Residuaalin normi siis mittaa sitä, miten "hyvin" yhtälösysteemi toteutuu.
     Laske residuaalin (euklidinen) normi sekä alkupisteessä että Newton-askeleen antamassa pisteessä. **(1 p.)**
   - Merkitseekö pieni residuaali yleisesti pientä virhettä? Havainnollista asiaa kahdella kuvalla, joista toisessa vastaus on myönteinen ja toisessa kielteinen. Tässä riittää ottaa esimerkit yhden yhtälön tapauksesta. **(1 p.)**

3. Numeerisen integroinnin kaavat ovat yleensä muotoa

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

---

[1] $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

Ajatellaanpa vaikka Puolisuunnikas- tai Simpsonin kaavaa. Eräänä integrointikaavan tarkkuusmittarina on se, miten korkea-asteiset polynomit kaava integroi tarkasti. Simpsonilla tämä luku on 3, sillä jäännöstermissä esiintyy $f^{(4)}(\xi)$.

Gaussin oivallus on siinä, että ei kiinnitetä "solmuja" x_i, vaan asetetaan tehtäväksi niiden optimaalinen valinta integroimisvälillä siten, että tietyllä solmumäärällä saadaan mahdollisimman korkea-asteiset polynomit integroiduksi tarkasti.

Gaussin kahden pisteen kaava välillä [-1,1] on

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2).$$

Koska määrättäviä parametreja on 4 kpl (x_1, x_2, c_1, c_2), on odotettavissa, että 3-asteinen polynomi (4 kerrointa) saadaan integroiduksi tarkkaan.

- Osoita, että näin tosiaan on.

  Ohje: Valitse integrointikaavassa funktioksi f vuorotellen monomit $1, x, x^2, x^3$ ja ratkaise syntyvästä yhtälösysteemistä parametrit x_1, x_2, c_1, c_2. Voit lähteä symmetriasyistä etsimään ratkaisua, jossa $x_1 = -x_2$. **(4 p.)**
- Laske Gaussin 2 pisteen kaavalla likiarvo integraalille

  $$\int_0^1 t^2 e^{-t} dt.$$

  Ohje: Suorita ensin lineaarinen muuttujanvaihto, jolla muunnat välin $[0, 1]$ väliksi $[-1, 1]$.

  Mikä on suhteellinen virhe? Tarkka arvo saadaan kahdella osittaisintegroinnilla tai esim. MAPLE:lla:

  ```
  > latex(Int(t^2*exp(-t),t=0..1)=int(t^2*exp(-t),t=0..1));
  ```

  $\int_0^1 t^2 e^{-t} dt = -5\,e^{-1} + 2$ **(2 p.)**

4.
- Laske Eulerin menetelmällä ratkaisuapproksimaatiot alkuarvotehtävälle

  $$y' = \frac{2}{t} y + t^2 e^t, \quad y(1) = 0$$

  välillä $t \in [1, 2]$, kun askel $h = 0.25$ (siis pisteissä $t_1 = 1 + h, t_2 = 1 + 2h, t_3 = 1 + 3h, t_4 = 2$). **(4 p.)**
- Totea sijoittamalla, että tarkka ratkaisu on $y(t) = t^2(e^t - e)$ ja määritä absoluuttinen ja suhteellinen virhe laskentapisteissä. **(2 p.)**

Mukana saa olla :

- Kaavakokoelma (Pentikäinen, MAOL (tuskin tarpeen)) mutta ei käsikirjaa, kuten BETA eikä muuta kirjallisuutta tai prujuja.
- standardilaskin (ei ohjelmoitava).