Mat-1.117 Numeerinen analyysi B kevät -95

Apiola/Korvola

Tentti 22.5. 1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Selosta lyhyesti, mutta ytimekkäästi ja mielellään esimerkeillä valaisten seuraavat asiat:

   - Mistä johtuu merkitsevien numeroiden katoaminen vähennettäessä kaksi lähes yhtä suurta lukua. (Esimerkissäsi voit aivan yhtä hyvin käyttää 10-järjestelmää kuin binäärilukujakin.)
   - Matriisin häiriöluku ("condition number") ja miten sen avulla voidaan arvioida suhteellisen virheen kasvua. (Havainnollistusta esimerkin ja mahd. kuvan muodossa katsellaan suopeasti.)
   - Kuutiosplini, määritelmä, mitä tarkoittavat "luonnolliset" reunaehdot. Miksi splini-interpolaatio on soveliaampi suuren havaintoaineiston "funktionalisoimiseen" kuin polynomi-interpolaatio?

2. Laske sopivaa Taylorin polynomia ja siihen liittyvää virhetermiä hyväksi käyttäen likiarvo integraalille
   $$\int_0^1 \sqrt{x} e^{x^2} dx$$
   siten, että virheen itseisarvo on korkeintaan 0.002.

3. Selvitä graafisen tarkastelun avulla yhtälöryhmän
   $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ e^x - y = 0 \end{cases}$$
   ratkaisujen lukumäärä ja likiarvot. Tarkenna kutakin ratkaisua Newtonin menetelmällä. Yksi kierros kutakin juurta kohden riittää. Numeeristen laskujen sijasta voit halutessasi kirjoittaa MATLAB-komennot, joilla laskeminen sujuisi. Jos näin teet, tulee komentojen olla jokseenkin virheetöntä, lähes koneen hyväksymää MATLAB-koodia.

4. Olkoon $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$. Laske likiarvo $f(1.03)$:lle käyttäen pisteisiin $x_0 = 1, x_1 = 1.05, x_2 = 1.07$ asetettua interpolaatiopolynomia. Voit käyttää hyväksesi seuraavia MATLAB-rivejä:

   ```
   >> x=[1,1.05,1.07];
   >> f=3*x.*exp(x)-exp(2*x)
   f =
       0.7658    0.8354    0.8589
   ```

   Arvioi virheelle yläraja interpolaatiovirhekaavan avulla.

   Vihje: Derivaatan $|f^{(n+1)}|$ maksimin sijainti on helppo selvittää katsomalla $f^{(n+2)}$:n merkkiä

5. Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = t^2 - x, \quad x(0) = 2$ Eulerin menetelmällä. välillä $[0, 0.2]$ käyttäen a.) askelpitutta $h = 0.2$ (vain yksi jakoväli) ja b.) askelpituutta $h = 0.1$ (kaksi jakoväliä).

   Vertaa ratkaisua tarkkaan ratkaisuun pisteessä $t = 0.2$. Käyttäytyykö virhe odotetulla tavalla, kun askelpituus puolitetaan?

Mukana saa olla :

- Kaavakokoelma (Pentikäinen, MAOL (tuskin tarpeen)) mutta ei käsikirjaa, kuten BETA
- MATLAB-opas (Primer ja/tai Kivelä, tms.). Muuta kirjallisuutta tai prujuja ei!!
- standardilaskin (ei ohjelmoitava).