Mat-1.117 Numeerinen analyysi B

Tentti 27.09. 1994 **Apiola**

1. Anna selitykset seuraaville:
   - liukuluku (1 p.)
   - Konveksi peite (1 p.)
   - Anna jokin esimerkki yksiaskel- ja moniaskelmenetelmästä ja selvittele käsitteitä *eksplisiittinen* ja *implisiittinen* menetelmä. (Tarkkoja kaavoja ei välttämättä tarvitse muistaa, kunhan kaavojen muoto.) (4 p.)

2. Tarkastellaan pistejoukkoa $(1,2),(2,0),(4,-1),(6,3)$. Laske paras L^2-approksimaatio käyttäen kantafunktioita $f_1(x) = \sin(x^2)$ ja $f_2(x) = \ln x$. Laske residuaalin [1] L^2-normi.

3. Etsi likiarvo yhtälösysteemin
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x^3 + x - y = 1 \end{cases}$$
1. koordinaattineljänneksessä ($x > 0, y > 0$) olevalle juurelle määrittämällä graafisesti alkuarvaus ja suorittamalla yksi askel *Newtonin* menetelmällä.

4. Missä kohdassa/kohdissa pisteitten $b_0 = (2,4), b_1 = (3,1), b_2 = (6,-2)$ määrittelemä Bézier-käyrä leikkaa x-akselin?. Mikä on käyrän tangentti tässä pisteessä?

5. Ratkaise alkuarvotehtävä
$$y'' = xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$
neljännen kertaluvun *Runge-Kutta*-menetelmällä (RK4) pisteessä $x = 0.5$ ($h = 0.5$).

   Ohje: RK4 voidaan yhtälön $y' = f(x,y)$ tapauksessa esittää kaavoilla $v_1 = f(x_n, y_n), v_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}v_1),\ v_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}v_2), v_4 = f(x_n + h, y_n + hv_3),\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4)$.

   Sovita tämä kaava 1. kertaluvun systeemille ja muunna tehtävä sellaiseksi. **Huom:** Muuntaminen tapahtuu merkitsemällä derivaattaa y' uudella muuttujalla, vaikkapa v ja kirjoittamalla $y' = v, v' = ...$ Sitten vaan tulkitaan yo. ”skalaarikaavassa” sopivat suureet vektoreiksi. Ei tämä ole vaikea tehtävä, ”cheer up”!!

Huom! Tentissä **ei** saa olla mukana kirjallisuutta.

[1] Residuaali tarkoittaa erotusta $y - Ac$, missä y koostuu annetun datan $y-$ koordinaateista ja c on ratkaisuksi saatu kerroinvektori.