Mat-1.117 Numeerinen analyysi B kevät -95

Apiola/Korvola

2. välikoe 8.5. 1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Olkoon annettu taulukko

x_0	x_1	x_2
y_0	y_1	y_2

, missä x-pisteet ovat tasaväliset: $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ ($h > 0$). Muodosta tätä dataa interpoloiva polynomi a) Lagrangen, b) Newtonin menetelmällä.

   Vastaukseksi a)-kohdassa riittää Lagrangen polynomien lausekkeet ja niiden avulla lausuttu interpolaatiopolynomi, b)-kohdassa tuloksen saa jättää "Newtonmaiseen" muotoon.

2. Määritä luonnollinen kuutiollinen splini, jonka solmut ovat $-1, 0, 1$ ja joka interpoloi dataa

x	-1	0	1
y	5	6	9

3.
   - a) Määritä vakiot x_0, x_1, A_0, A_1 siten, että likiarvokaava $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq A_0 x_0 + A_1 x_1$ on tarkka mahdollisimman korkea-asteisille polynomeille f. Muodosta ensin asianmukainen yhtälöryhmä ja totea sitten, että $x_0 = -1/\sqrt{3}, x_1 = 1/\sqrt{3}, A_0 = A_1 = 1$ toteuttaa ryhmän.
   - b) Laske likiarvo $\ln 2$:lle soveltamalla a)-kohdan kaavaa ja sopivaa muuttujanvaihdosta integraaliin $\int_0^1 \frac{dt}{t+1}$. Kuinka monta oikeaa numeroa saat?

4. Klassinen Runge-Kutta lasketaan näin:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, x_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_3) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

   Tarkastellaan alkuarvotehtävää $x' = -tx, \quad x(0) = 1$.

   - a) Kirjoita MATLAB-komennot (käyttämättä valmista funktiota `rk4`), joilla saat lasketuksi Runge-Kutta-ratkaisun välillä $[0, 0.2]$ käyttäen ensin askelta $h = 0.2 (m = 1)$ ja sitten askelta $h = 0.1 (m = 2)$. Vaihtoehtoisesti voit laskea kynällä ja laskimella.
   - b) Tarkastellaan nyt saman alkuarvotehtävän ratkaisemista välillä $[0, 2]$. Huomaa, että sen tarkka ratkaisu on $x(t) = e^{-t^2/2}$. Harjoituksissa käytetyn Mathewsin `rk4`-koodin helppiteksti on seuraavanlainen:

```
[T,Y] = rk4(f,a,b,ya,m)
  Runge-Kutta solution for y' = f(t,y) with y(a) = ya.
  f  is the function, input.
  a  is the left endpoint, input.
```

```
  b  is the right endpoint, input.
  ya is the initial condition, input.
  m  is the number of steps, input.
  T  is the vector of abscissas, output.
  Y  is the vector of ordinates, output.
```

Tiedostossa `f.m` on asianmukainen koodi:

```
function z=f(t,x)
z=-t.*x;
```

Seuraavassa on hieman editoitu Matlab-istunto:

```
>> T=2;x2=exp((-T.^2)/2);
>> [t,x]=rk4('f',0,2,1,2);[t',x']

                  0   1.00000000000000
   1.00000000000000   0.60416666666667
   2.00000000000000   0.15104166666667

>> er0=x2-x(length(x)) % Kommentti 0

  -0.01570638343005

>> [t,x]=rk4('f',0,2,1,4);[t',x']

                  0   1.00000000000000
   0.50000000000000   0.88248697916667
   1.00000000000000   0.60649434725444
   1.50000000000000   0.32491473697721
   2.00000000000000   0.13649168882457

>> er1=x2-x(length(x)); % Kommentti 1
>> [t,x]=rk4('f',0,2,1,8);
>> er2=x2-x(length(x)); % Kommentti 2
>> [t,x]=rk4('f',0,2,1,16);
>> er3=x2-x(length(x)); % Kommentti 3
>> [t,x]=rk4('f',0,2,1,32);
>> er4=x2-x(length(x)); % Kommentti 4
>> [er0/er1,er1/er2,er2/er3,er3/er4]

   13.5821   19.1008   18.0335   17.0805
```

Selvitä, mitä nämä Matlab-rivit tekevät (kirjoita ainakin asianmukaiset kommentit "Kommentti 0,...,4") ja erityisesti, mitä viimeinen tulostusrivi (likimäärin) kertoo menetelmän kertaluvusta (globaalin virheen käyttäytymisestä askelpituuden funktiona).

Mukana saa olla :

- Kaavakokoelma (Pentikäinen, MAOL (tuskin tarpeen)) mutta ei käsikirjaa, kuten BETA
- Matlab-opas (Primer ja/tai Kivelä, tms.). Muuta kirjallisuutta tai prujuja ei!!

- standardilaskin (ei ohjelmoitava).