Mat-1.016 Numeerinen analyysi Pitkäranta

Seuraavat tehtävät[1] on tarkoitettu valmistautumiseen tenttiä varten. Niissä käydään läpi alueen keskeisimmät kysymykset. Lukuintoja.

Ongelmissa voi kääntyä Prof Juhani Pitkärannan (juhani.pitkaranta@hut.fi) tai ass. Jan v.Pfaler:in (jan.von.pfaler@hut.fi) puoleen.

Tehtäviin EI ole saatavilla mallivastauksia.

1. Funktio $f(x) = \ln x$ taulukoidaan välillä $[1, 2]$ käytäen a) ensimmäisen asteen Lagrangen b) kolmannen asteen Hermiten interpolaatiota pisteiden $x_i = 1 + i/n$, $i = 0 \dots n$ välissä. Kuinka suureksi n on valittava, jos halutaan, että interpolaatiovirhe on itseisarvoltaan enintään 10^{-8}.

2. Hae toisen asteen polynomi p, joka approksimoi funktiota $f(x) = (x - 1)^3$ välillä $[-1, 1]$ sinä mielessä, että
$$\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx$$
on mahdollisimman pieni. Ensimmäiset kolme Legendren polynomia ovat
$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad \int_{-1}^{1} P_2(x)^2 dx = \frac{2}{5}$$
.

3. Määrää funktion $f(x) = e^x$ kolmannen asteen Hermiten interpolaatiopolynomi p pisteissä $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Laske myös $\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)|$.

4. Määrää funktion $f(x) = 1/(4 + x^2)$ a) 1. asteen Tsebysev-interpolantti välillä $[-1, 1]$. b) sellainen 1. asteen interpolaatiopolynomi, jonka maksimivirhe välillä $[-1, 1]$ on mahdollisimman pieni.

5. On haettava 1. asteen polynomi $p(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y$ joka sopii funktioon
$$f(x, y) = \frac{x}{1 + y} - \frac{2y}{1 + x}$$
mahdollisimman hyvin pisteissä
$$(x_i, y_i) = (0.1i,\ 0.1j), \quad i, j \in \{-1, 0, 1\}$$
siinä mielessä, että neliösumma
$$\sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} [(f - p)(x_i, y_i)]^2$$
on mahdollisimman pieni. Kirjoita tehtävä normaalimuodossa ja ratkaise se.

[1] versio 5. maaliskuuta 1998

6. Olkoon $f(x) = x^2$. Hae sellainen 1. asteen polynomi $P(x)$, että

$$\int_0^1 (f(x) - P(x))^2 dx + M[f(0) - P(0)]^2 + M[f(1) - P(1)]^2$$

on mahdollisimman pieni ($M \geq 0$ on parametri). Miten käy, kun $M \to \infty$? Jotta et sotkeutuisi, aloita normaalimuodosta.

7. Millaisille polynomiarvoisille funktioille f saadaan integraalille

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx\ dy$$

tarkka arvo käytettäessä 2×2 pisteen Gauss-Legendren kvadratuuria? Perustele väitteesi ja määrittele myös mikä tuo kvadratuuri on.

8. On haettava funktiolle $f(x, y) = x^2 + xy$ paras mahdollinen sovitus muotoa $p(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y$ siinä mielessä, että

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (f - p)^2 dx\ dy$$

minimoituu. Kirjoita tehtävä normaalimuodossa ja ratkaise se.

9. Määrittele sisätulon

$$(f, g) = \int_0^1 x f(x) g(x) dx$$

mielessä ortonormaalit funktiot p_0 ja p_1, jotka ovat muotoa

$$p_0(x) = a, \quad p_1(x) = bx + c, \quad (a, b, c\text{vakioita}),$$

ja näiden avulla em. sisätuloon liittyvän normin mielessä paras 1. asteen polynomiapproksimaatio funktiolle $f(x) = x^2$.

10. Funktiosta f tiedetään, että se on kolmannen asteen polynomi ja että $f(-0.1) \approx 1.12, f(0) \approx 1.46$ ja $f(0.1) \approx 1.28$, missä funktioiden arvojen virhe on itseisarvoltaan enintään 0.005. Laske annetuista tiedoista $f''(0)$ mahdollisimman tarkasti ja arvioi, kuinka suuri tämän likiarvon virhe enintään on.

11. Kuinka tarkasti $e^{0.001}$ saadaan lasketuksi, kun sovelletaan Crank-Nicolsonin menetelmää (trapetsisääntöä) askelpituudella $h = 0.001$ differentiaaliyhtälön $x'(t) = x(t)$ numeeriseen ratkaisuun välillä $[0, h]$ alkuehdolla $x(0) = 1$?

12. Funktio $y = y(t)$ on alkuarvotehtävän

$$\dot{y} = -y^2 + t, \quad y(0) = 1$$

ratkaisu. Laske $y(1)$ likimäärin käyttäen askelpituutta $h = 1$ (siis yksi askel!) ja seuraavia menetelmiä

(a) Eulerin (explisiittinen) menetelmä

(b) Trapetsi

13. Integraali $\int_0^1 x^{0.1} \cos x \; dx$ lasketaan (paloittaisella) trapetsisäännöllä jakamalla integroimisväli n:ään yhtä suureen osaan. Näytä, että tehty virhe on vähintään $0.4n^{-1.1}$ kun $n \geq 0$. Opastus: arvioi virhettä ensimmäisellä osavälillä ja huomaa, että funktio on integroimisvälillä ylöspäin kupera.

14. Määritä kahden pisteen Gaussin kvadratuurista kvadratuuripisteet ja -painot välillä $[-1, 1]$ vaatimuksesta, etä kvadratuurin on integroitava tarkasti polynomit astetta 3.

15. Johda Peanon ytimen $K(t)$ lauseke keskipistesäännön (=yhden pisteen Gauss) virhekaavassa

$$-(b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b K(t)f''(t)dt \quad .$$

16. Funtion f yksinkertaista nollakohtaa voi hakea kiintopisteiteraatiolla

$$x_{k+1} = F(x_k), k = 0, 1, \ldots$$

missä

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{2f'(x)} \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)^2 .$$

Jos iteraatio suppenee, niin mikä on suppenemisen kertaluku? Suppeneeko iteraatio aina kun lähdetään riittävän läheltä yksinkertaista nollakohtaa?

17. Hae yhtälöryhmälle

$$x - ae^{x-y} = 0 \quad y - a \cos x e^{x-y} = 0 \tag{1}$$

missä $a = 0.01$ jokin ratkaisu jollakin menetelmällä kuuden desimaalin tarkkuudella. Selvitä käyttämäsi menetelmän periaate ja laskun välitulokset.

18. Hae yhtälöryhmälle (1) ratkaisu likimäärin kahdella iteraatioaskelella käyttäen ensimmäisellä askeleella kiintopisteiteraatiota ja toisella Newtonin menetelmää. Tässä $a = 0.01$. Käytä alkuarvauksena ratkaisua tapauksessa $a = 0$.

19. Yhtälön $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ reaalista, positiivista ratkaisua haetaan kiintopisteiteraatiolla muodosta $x = F(x)$, missä

    (a) $F(x) = 1 + 1/x + 1/x^3$
    (b) $F(x) = x^3 - x^2 - 1$
    (c) $F(x) = (2x^3 - x^2 + 1)/(3x^2 - 2x - 1)$.

    Tutki mitkä iteraation suppenevat (lähdettäesä riittävän läheltä juurta) ja määrää suppenevissa tapauksissa suppenemisen kertaluku.

20. Kiintopisteiteraatio

$$x_{k+1} = \frac{10}{9} \sin(x_k)$$

suppenee alkuarvoilla $x_0 \in (0, 1)$ kohtipistettä $\bar{x}$. laske $\bar{x}$ sekä asymptoottinen suppenemisnopeus.

21. Hae sellaiset x_0:n rationaaliset arvot, joilla kiintopisteiteraatio

$$x_{k+1} = (6 - x_k)^2$$

suppenee. Perustelut myös!

22. Näytä, että iteraatio $x_{n+1} = e^{-x_n}$ suppenee kaikilla alkuarvoilla x_0, ja laske neljän merkitsevän numeron tarkkuudella

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{x_n - \bar{x}},$$

missä $\bar{x}$ on kiintopiste.

23. Näytä, että integraalille

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$

pätee palautuskaava $I_n + 5I_{n+1} = 1/n$. Laske saamallasi kaavalla likiarvo I_4:lle lähtien arvosta $I_0 = 0$. Arvioi saamasi likiarvon virhe.

24. Oletetaan, että käytettävissä on laskulaite, jossa luvut esitetään liukulukuina viidellä merkitsevällä numerolla.

    (a) Mitä saadaan tulokseksi, jos ko. laitteella lasketaan funktion $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ arvo pisteessä $x = 1000$ suoraan kaavasta?

    (b) Esitä jokin tapa (algoritmi), jolla $f(1000)$ saadaan em. laitteella oikein kolmella merkitsevällä numerolla.

25. Määrittele seuraavat integrointikaavat ja luettele niiden tärkeimmät ominaisuudet (erityisesti kertaluku)

    (a) puolisuunnikassääntö

    (b) Simpsonin kaava

    (c) Gauss-Legendre.

26. Olkoon $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva $f(\xi) = 0$ ja $f'(\xi) \neq 0$. Osoita kiintopistelauseen avulla, että eräässä ympäristössä $B = \{x \in \mathcal{R} : |x - \xi| \leq r\}$ newtonin iteraatio suppenee.

27. Hae Newtonin menetelmällä (systeemimuodossa!) yhtälöparin

$$\begin{cases} 2s - e^t = 0 \\ s^2 + t^2 = 1 \end{cases}$$

ratkaisu tason neljänneksessä $s \geq 0, t \geq 0$.

28. Olkoon $a = 0.001$. Hae yhtälöryhmälle

$$\begin{aligned} x - \frac{a}{x^2 + y^3 + y} - 1 &= 0 \\ y - axe^{x-y} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

likimääräinen ratkaisu suorittamalla kaksi askelta Newtonin iteraatiota. Selvitä menetemän periaate. Käytä alkuarvona ratkaisua tapauksessa $a = 0$.

29. Tarkastele yhtälösysteemiä

$$\begin{aligned} y - e^x + 1 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Osoita (esim. graafisesti), että tehtävällä on 2 ratkaisua, laske likiarvo toiselle näistä käyttäen Newtonin menetelmää systeemimuodossa.

30. Kun ϵ on itseisarvoltaan hyvin pieni, on polynomin

$$p_\epsilon(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + \epsilon x^6$$

eräs nollakohta likimain $1 + a\epsilon$. Laske a.

31. Olkoon

$$f(x) = \frac{\ln(1-x) + xe^{x/2}}{x^3}.$$

Halutaan laskea $f:n$ arvoja, kun $x \in [0, 10^{-4}]$ siten, että virhe $< 10^{-9}$. Muokkaa tehtävä sellaiseen muotoon, että tavallinen laskin selviytyy siitä. Kokeile arvoja $x = 0$ ja $x = 10^{-4}$.

32. Tiedetään, että arvoilla $f(1) = 2.63$, $f(2) = 1.70$ ja $f(3) = 1.43$ ja että suurilla x:n arvoilla pätee

$$f(x) = a + b/x + c/x^2 + \ldots$$

Extrapoloi tämän perusteella arvio raja-arvolle $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

33. Luvuista $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3}$ tiedetään, että kahdeksan desimaalin tarkkuudella

$$s_4 \approx 1.17766204, \; s_5 \approx 1.18566204, \; s_6 \approx 1.19029167$$

Laskematta muita osasummia kehitä extrapoloimalla mahdollisimman tarkka approksimaatio raja-arvolle $\lim_{n\to\infty} s_n$. Käytä esimerkiksi Nevillen algoritmia.

34. Käytettävissä on tietokone, joka summeraa sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$$

10^9 termin sekuntivauhtia. arvioi kauanko kestää ennen kuin kone on laskenut sarjan summan neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.