Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
8. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
Cauchyn jännityksen Truesdellin aikaderivaatta on (B3.5.2)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \mathrm{div}(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \mathrm{tr}(\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma}. \tag{1}$$

Hyödynnetään aputuloksia[1]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^* &= \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T, & (2)\\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* &= \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{Q}}^T, & (3)\\ \mathbf{L}^* &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T. & (4) \end{aligned}$$

Koska $\mathrm{tr}(\mathbf{L})$ on tensorin $\mathbf{L}$ ensimmäinen pääinvariantti, pysyy se muunnoksessa $\mathbf{QLQ}^T$ vakiona ja näin ollen $\mathrm{tr}(\mathbf{L}^*) = \mathrm{tr}(\mathbf{L})$. Edellä esitettyjä tuloksia käyttäen saadaan Truesdellin derivaataksi kierretyssä järjestelmässä

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{*\nabla\mathcal{T}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* - \mathbf{L}^*\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^*\mathbf{L}^{*T} + \mathrm{tr}(\mathbf{L}^*)\boldsymbol{\sigma}^* \\ &= \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{Q}}^T - (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{QLQ}^T)\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T + \\ &\quad - \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{QLQ}^T)^T + \mathrm{tr}(\mathbf{L})\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \tag{5}$$

Kirjoittamalla auki suluissa olevat termit saadaan

$$-(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{QLQ}^T)\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = -\dot{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T - \mathbf{QL}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T, \tag{6}$$

$$-\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{QLQ}^T)^T = -\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{Q}}^T - \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T\mathbf{Q}^T. \tag{7}$$

Yllä saatuja lausekkeita käyttämällä päädytään haluttuun tulokseen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{*\nabla\mathcal{T}} &= \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q}^T - \mathbf{QL}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T\mathbf{Q}^T + \mathrm{tr}(\mathbf{L})\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}\big(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \mathrm{tr}(\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma}\big)\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}}\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \tag{8}$$

Teht. 2
Paineen p aiheuttama Cauchyn jännitys on muotoa $\boldsymbol{\sigma} = p\,\mathbf{I}$. Kirchhoffin jännitys on määritelty (5.4.21) $\boldsymbol{\tau} = J\,\boldsymbol{\sigma}$. Ensimmäinen tehtävässä pyydetyistä yhteyksistä

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{g} = 3Jp \tag{9}$$

on helppo osoittaa todeksi sijoittamalla jännityksen lauseke ja metrinen tensori $\mathbf{g} = \mathbf{I}$ yllä olevaan lausekkeeseen. Tällöin saadaan

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{g} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = J\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = J\,\mathrm{tr}(p\,\mathbf{I}) = 3Jp\,. \tag{10}$$

Käyttämällä oppikirjan yhteyksiä (5.7.3) ja (5.7.4), eli

$$\bar{\mathbf{C}}^e = (\mathbf{F}^e)^T\mathbf{F}^e \qquad \text{ja} \qquad \bar{\mathbf{S}} = (\mathbf{F}^e)^{-1}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{F}^e)^{-T}, \tag{11}$$

[1] (2): oppikirja (5.10.37), (3) saadaan derivoimalla (2), (4): oppikirja (5.10.23).

saadaan toisesta tehtäväpaperissa annettusta lausekkeeesta

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e &= \mathrm{tr}\big((\mathbf{F}^{e-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{e-T})^T\mathbf{F}^{eT}\mathbf{F}^e\big) \\ &= \mathrm{tr}\big((\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{e-T})^T\mathbf{F}^{e-T}\mathbf{F}^{eT}\mathbf{F}^e\big) \\ &= \mathrm{tr}\big(\mathbf{F}^{e-1}\boldsymbol{\tau}^T\mathbf{F}^e\big) \\ &= \mathrm{tr}\big(\boldsymbol{\tau}^T\mathbf{F}^e\mathbf{F}^{e-1}\big) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}^T) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{I} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{g}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Saatiin siis pyydetyt tulokset

$$3Jp = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{g} = \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e\,. \tag{13}$$

Teht. 3

Oppikirjan lausekkeiden (5.7.39) ja (5.7.40) mukaan

$$\bar{\mathbf{S}}^{\mathrm{dev}} = \bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\bar{\mathbf{C}}^{e-1} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{sym}\bar{\mathbf{r}} = \frac{3}{2\bar{\sigma}}\,\bar{\mathbf{C}}^e\bar{\mathbf{S}}^{\mathrm{dev}}\bar{\mathbf{C}}^e. \tag{14}$$

Sijoittamalla ensimmäinen jälkimmäiseen saadaan

$$\begin{aligned}\mathrm{sym}\bar{\mathbf{r}} &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\,\bar{\mathbf{C}}^e\big(\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\bar{\mathbf{C}}^{e-1}\big)\bar{\mathbf{C}}^e \\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\big(\,\bar{\mathbf{C}}^e\bar{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{C}}^e - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\bar{\mathbf{C}}^e\bar{\mathbf{C}}^{e-1}\bar{\mathbf{C}}^e\big) \\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\big(\,\bar{\mathbf{C}}^e\bar{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{C}}^e - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\bar{\mathbf{C}}^e\big). \end{aligned} \tag{15}$$

Saatua tulosta käyttäen saadaan tehtäväpaperissa annettu lauseke kirjoitettua

$$\begin{aligned}(\mathrm{sym}\bar{\mathbf{r}}) : (\bar{\mathbf{C}}^e)^{-1} &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\big(\,\bar{\mathbf{C}}^e\bar{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{C}}^e - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\bar{\mathbf{C}}^e\big) : \bar{\mathbf{C}}^{e-1} \\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\big((\bar{\mathbf{C}}^e\bar{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{C}}^e) : \bar{\mathbf{C}}^{e-1} - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\bar{\mathbf{C}}^e : \bar{\mathbf{C}}^{e-1}\big) \\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\big(\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{C}}^{e-T}\bar{\mathbf{C}}^e\bar{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{C}}^e) - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{C}}^{e-T}\bar{\mathbf{C}}^e)\big). \end{aligned} \tag{16}$$

Käyttämällä hyväksi tensorin $\mathbf{C}^e$ symmetria ja muokkaamalla lauseketta edelleen saadaan

$$\begin{aligned}(\mathrm{sym}\bar{\mathbf{r}}) : (\bar{\mathbf{C}}^e)^{-1} &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\big(\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{C}}^e) - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\mathrm{tr}(\mathbf{I})\big) \\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\big(\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{S}}\,\bar{\mathbf{C}}^e) - \frac{1}{3}\cdot 3\,(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\big) \\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\big(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^{eT} - \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e\big) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Käyttämällä edellä saatua tulosta ja yhteyttä (5.7.40) $\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda}(\mathrm{sym}\bar{\mathbf{r}})$ saadaan

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}^{\mathrm{dev}} : \bar{\mathbf{D}}^p &= (\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\bar{\mathbf{C}}^{e-1}) : \bar{\mathbf{D}}^p \\ &= \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p - \frac{1}{3}\dot{\lambda}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)\bar{\mathbf{C}}^{e-1} : (\mathrm{sym}\bar{\mathbf{r}}) \\ &= \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p - \frac{1}{3}\dot{\lambda}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{C}}^e)(\mathrm{sym}\bar{\mathbf{r}}) : \bar{\mathbf{C}}^{e-1} = \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p. \end{aligned} \tag{18}$$

Saatiin siis pyydetyt tulokset

$$(\mathrm{sym}\bar{\mathbf{r}}) : (\bar{\mathbf{C}}^e)^{-1} = 0 \qquad \text{ja} \qquad \bar{\mathbf{S}}^{\mathrm{dev}} : \bar{\mathbf{D}}^p = \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p\,. \tag{19}$$