Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
4. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
Jacobin determinantin ($J = \det \mathbf{F}$) materiaalisen aikaderivaatan laskemiseksi lasketaan ensin mielivaltaisen kääntyvän toisen kertaluvun tensorin $\mathbf{A}$ determinantin suunnattu derivaatta.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\det(\mathbf{A})[\mathbf{U}] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\det(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\det\big(\mathbf{A}(\mathbf{I}+\epsilon\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\big)\Big|_{\epsilon=0} \\ &= \det(\mathbf{A})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\det(\mathbf{I}+\epsilon\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0} \end{aligned} \tag{1}$$

Tensorin $\mathbf{S}$ determinantti voidaan lausua *pääinvarianttien* avulla muodossa

$$\det(\mathbf{S}-\omega\mathbf{I}) = -\omega^3 + I_1(\mathbf{S})\omega^2 - I_2(\mathbf{S})\omega + I_3(\mathbf{S}), \quad \text{kaikilla } \omega \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

missä $I_1(\mathbf{S}), I_2(\mathbf{S}), I_3(\mathbf{S})$ ovat tensorin $\mathbf{S}$ pääinvariantit

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{S}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{S}), \\ I_2(\mathbf{S}) &= \frac{1}{2}\big((\mathrm{tr}\mathbf{S})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{S}^2)\big), \\ I_3(\mathbf{S}) &= \det\mathbf{S}. \end{aligned} \tag{3}$$

Soveltamalla nyt lauseketta (2) arvolla $\omega = -1$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\det(\mathbf{I}+\epsilon\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\big(1 + I_1(\epsilon\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}) + I_2(\epsilon\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}) + I_3(\epsilon\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\big)\Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\big(1 + \epsilon I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}) + \epsilon^2 I_2(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}) + \epsilon^3 I_3(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\big)\Big|_{\epsilon=0} \\ &= I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}) = \mathbf{A}^{-T} \colon \mathbf{U}. \end{aligned} \tag{4}$$

Tensorin determinantin sunnatulle derivaatalla saadaan näin ollen lauseke

$$\mathrm{D}\det(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T} \colon \mathbf{U}. \tag{5}$$

Käyttämällä ylla saatua tulosta ja derivoinnin ketjusäätöä voidaan kirjoittaa

$$\dot{J} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\mathbf{F}(t)) = \mathrm{D}\det(\mathbf{F}(t))[\dot{\mathbf{F}}(t)] = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} \colon \dot{\mathbf{F}} = J\,\mathrm{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}). \tag{6}$$

Oppikirjassa on annettu yhteydet $\mathbf{L} = (\nabla\mathbf{v})^T$ (3.3.7a) ja $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L}$ (3.3.18). Näitä käyttäen saadaan Jacobin determinantin materiaaliseksi aikaderivaataksi

$$\dot{J} = J\,\mathrm{tr}(\nabla\mathbf{v}) = J\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \tag{7}$$

Teht. 2
Kulmaliikemäärän säilymisyhtälö on

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\Omega \mathbf{x}\times\rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mathbf{x}\times\rho\,\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \mathbf{x}\times\mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{8}$$

Käyttämällä *Reynolds*in kuljetuslausetta (3.5.38) ja ottamalla huomioon yhteys $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ saadaan yhtälön ensimmäinen termi muotoon

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\Omega \mathbf{x}\times\rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \rho\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathbf{x}\times\mathbf{v})\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \rho\,(\mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{x}\times\dot{\mathbf{v}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mathbf{x}\times\rho\,\dot{\mathbf{v}}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{9}$$

Cauchyn yhteyden (3.4.1) avulla saadaan kulmaliikemäärän säilymisyhtälön viimeisestä termistä

$$\int_\Gamma \mathbf{x} \times \mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{10}$$

Ristitulo voidaan kirjoittaa permutaatiosymbolia $\boldsymbol{\mathcal{E}} = e_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ käyttäen seuraavasti (3.2.44, 45)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = e_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i, \qquad e_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{indeksien } ijk \text{ parillisella permutaatiolla} \\ -1, & \text{indeksien } ijk \text{ parittomalla permutaatiolla} \\ 0, & \text{jos jotkut indekseistä ovat samoja} \end{cases} \tag{11}$$

Kirjoittamalla (10) indeksinotaatiota käyttäen ja soveltamalla *Gauss*in lausetta (vrt. 3.5.31) saadaan

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}\Gamma &= \int_\Gamma e_{ijk} x_j n_l \sigma_{lk}\,\mathrm{d}\Gamma\,\mathbf{e}_i \\ &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l}\, e_{ijk} x_j \sigma_{lk}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathbf{e}_i && (12) \\ &= \int_\Omega \big(e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} \sigma_{lk} + e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}\big)\,\mathrm{d}\Omega\,\mathbf{e}_i && (13) \\ &= \int_\Omega \big(e_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{lk} + e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}\big)\,\mathrm{d}\Omega\,\mathbf{e}_i && (14) \\ &= \int_\Omega \big(e_{ijk} \sigma_{jk} + e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}\big)\,\mathrm{d}\Omega\,\mathbf{e}_i && (15) \\ &= \int_\Omega \big(\boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x} \times \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\big)\,\mathrm{d}\Omega. && (16) \end{aligned}$$

Kulmaliikemäärän säilymisyhtälö voidaan näin ollen kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{x} \times \rho\,\dot{\mathbf{v}}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \mathbf{x} \times \rho\,\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \big(\boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x} \times \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\big)\,\mathrm{d}\Omega &= && (17) \\ \int_\Omega \mathbf{x} \times \big(\rho\,\dot{\mathbf{v}} - \rho\,\mathbf{b} - \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\big)\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega &= \mathbf{0}. && (18) \end{aligned}$$

Liikemäärän säilymisyhtälön (B3.3.2) mukaan on

$$\rho\,\dot{\mathbf{v}} - \rho\,\mathbf{b} - \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \tag{19}$$

jolloin kulmaliikemäärän säilymisyhtälöstä jää jäljelle

$$\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad e_{ijk}\sigma_{jk}\mathbf{e}_i = \begin{Bmatrix} \sigma_{23} - \sigma_{32} \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{20}$$

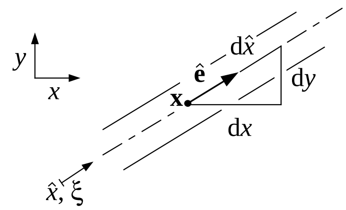
Jotta yllä esitetty toteutuisi, on oltava $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, eli $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$. Cauchyn jännitystensori on siis symmetrinen.

Teht. 3

Koordinaatistoissa xy ja $\hat{x}\hat{y}$ lausuttujen vektorien $\mathbf{r}$ ja $\hat{\mathbf{r}}$ välillä on yhteys (3.2.34)

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{R}^T\mathbf{r}, \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x\hat{x}} & R_{x\hat{y}} \\ R_{y\hat{x}} & R_{y\hat{y}} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Kuvassa (1) on esitetty elementin keskiviivan tangentin yksikkösuuntavektori $\hat{\mathbf{e}}$ pisteessä pisteessä $\mathbf{x}$, sekä differentiaaliset pituusalkiot eri koorodinaattisuunnille.



Kuva 1: Elementin keskiviivaa pitkin kulkeva korotationaalinen koordinaatti $\hat{x}$, dimensioton koordinaatti ξ ja tangentiaalinen suuntavektori $\hat{\mathbf{e}}$.

Parametrin ξ avulla lausutun xy-tason käyrän derivaatta saadaan lausekkeesta

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\xi} \; . \tag{22}$$

Merkitsemällä

$$\mathbf{x}_{,\xi} = \left\{ \begin{array}{c} \partial x/\partial \xi \\ \partial y/\partial \xi \end{array} \right\} \tag{23}$$

voidaan tangentiaalinen yksikkösuuntavektori kirjoittaa

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \frac{\mathbf{x}_{,\xi}}{||\mathbf{x}_{,\xi}||} \; . \tag{24}$$

Elementin muotofunktioiden ja solmupisteiden koordinaattien avulla lausuttuna on

$$x(\xi) = x_I N_I(\xi), \quad y(\xi) = y_I N_I(\xi), \quad \mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = \mathbf{x}_I N_I(\xi), \tag{25}$$

missä indeksi I viittaa elementin solmunumeroihin ja toistuvan indeksin yli summataan. Viimeisestä lausekkeesta saadaan koordinaatin ξ suhteen derivoimalla

$$\mathbf{x}_{,\xi} = \mathbf{x}_I N_{I,\xi}(\xi). \tag{26}$$

Korotationaalinen venymänopeus on (3.4.15)

$$\hat{D}_x = \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{||\mathbf{x}_{,\xi}||}\frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \xi}. \tag{27}$$

Korotationaaliseksi nopeudeksi saadaan xy-koordinaatiston nopeuskomponenttien avulla lausuttuna (4.6.1)

$$\hat{v}_i = R_{ji} v_j \quad \Rightarrow \quad \hat{v}_x = R_{x\hat{x}} v_x + R_{y\hat{x}} v_y. \tag{28}$$

Sijoittamalla tähän nopeuskomponentit v_x ja v_y solmunopeuksien avulla lausuttuna saadaan

$$\hat{v}_x = N_I(\xi)(R_{x\hat{x}} v_{xI} + R_{y\hat{x}} v_{yI}). \tag{29}$$

Tästä saadaan korotationaalisen nopeuden derivaataksi elementtikoordinaatin ξ suhteen

$$\frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \xi} = N_{I,\xi}(\xi)(R_{x\hat{x}} v_{xI} + R_{y\hat{x}} v_{yI}). \tag{30}$$

Kaikki tarvittavat tulokset on nyt johdettu ja voidaan ryhtyä tarkastelemaan korotationaalista venymänopeutta elementin eri kohdissa. Tarkastellaan ensin solmua 2. Tässä solmussa on $\xi = 0$ ja $\theta = 0$, jolloin saadaan

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc} R_{x\hat{x}} & R_{x\hat{y}} \\ R_{y\hat{x}} & R_{y\hat{y}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]. \tag{31}$$

Näin ollen saadaan

$$\mathbf{x}_{,\xi} = \mathbf{x}_I N_{I,\xi} = -\frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -r\sin\theta \\ 0 \end{array} \right\} + 0 \cdot \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ r(1-\cos\theta) \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{c} r\sin\theta \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} r\sin\theta \\ 0 \end{array} \right\}, \quad (32)$$

josta edelleen

$$||\mathbf{x}_{,\xi}|| = r\sin\theta. \quad (33)$$

Nyt $R_{x\hat{x}} = 1$ ja $R_{y\hat{x}} = 0$, joten lausekkeesta (30) saadaan

$$\hat{v}_{,\xi} = N_{I,\xi}(R_{x\hat{x}}v_{xI} + R_{y\hat{x}}v_{yI}) = -\frac{1}{2} \cdot (-v_r\sin\theta) + \frac{1}{2} \cdot v_r\sin\theta = v_r\sin\theta. \quad (34)$$

Korotationaaliseksi venymänopeudeksi solmussa 2 saadaan näin ollen

$$\hat{D}_x = \frac{1}{||\mathbf{x}_{,\xi}||}\,\hat{v}_{x,\xi} = \frac{v_r\sin\theta}{r\sin\theta} = \frac{v_r}{r}. \quad (35)$$

Todetaan saadun tuloksen olevan yhtäpitävä sylinterikoordinaatistossa lausutun venymänopeuden $D_{\theta\theta} = v_r/r$ kanssa.

Tehtävän toisessa kohdassa pyydettiin suoritamaan samat laskut Gaussin pisteessä $\xi = -1/\sqrt{3}$. Kyseisessä pisteessä saadaan

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\begin{array}{ccc} -(2+\sqrt{3}) & 4 & (-2+\sqrt{3}) \end{array} \right], \qquad R_{x\hat{x}} = \cos\alpha,\ R_{y\hat{x}} = \sin\alpha,\ (\alpha = \theta/\sqrt{3}). \quad (36)$$

Yllä oleva muotofunktiomatriisin derivaatta ja solmupistekoordinaatit sijoittamalla päädytään tulokseen

$$\mathbf{x}_{,\xi} = \mathbf{x}_I N_{I,\xi} = \frac{r}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{3}\sin\theta \\ 2-2\cos\theta \end{array} \right\}. \quad (37)$$

Tästä saadaan muutamien välivaiheiden jälkeen

$$||\mathbf{x}_{,\xi}|| = \frac{r}{\sqrt{3}}(7 - 8\cos\theta + \cos^2\theta)^{1/2}. \quad (38)$$

Tarvittavat arvot sijoittamalla saadaan melko monen välivaiheen jälkeen

$$\hat{v}_{,\xi} = N_{I,\xi}(R_{x\hat{x}}v_{xI} + R_{y\hat{x}}v_{yI}) = \frac{v_r}{\sqrt{3}}(-2\sin\alpha\cos\theta + \sqrt{3}\cos\alpha\sin\theta + 2\sin\alpha). \quad (39)$$

Korotationaaliseksi venymänopeudeksi Gaussin pisteessä saadaan näin ollen

$$\hat{D}_x = \frac{1}{||\mathbf{x}_{,\xi}||}\,\hat{v}_{x,\xi} = \frac{v_r}{r}\,\frac{(2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\theta + \sqrt{3}\cos\alpha\sin\theta)}{\sqrt{7 - 8\cos\theta + \cos^2\theta}}. \quad (40)$$

Kulman θ arvoilla $\theta = 0.1$ ja $\theta = 0.05$ saadaan kummassakin tapauksessa yhdeksän merkitsevän numeron tarkkuudella $\hat{D}_x = v_r/r$.

Teht. 4

Oppikirjassa on tensorin $\mathbf{A}$ pääinvarianteiksi annettu (B5.2.1 a,b,c)

$$I_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}), \quad (41)$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\big((\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)\big), \quad (42)$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}). \quad (43)$$

Ottamalla huomioon yhteys $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{I}$ saadaan Cauchyn jännitystensorin ensimmäisen invariantin materiaaliseksi aikaderivaataksi

$$\dot{I}_1(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{I}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I} = \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (44)$$

Invariantin derivaatan lausumiseksi Jaumannin derivaatan avulla käytetän harjoituksessa (3) saatua tulosta, jonka mukaan tensoreiden $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ollessa symmetrisiä ja toteuttaessa lisäksi ehdon $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ovat voimassa yhteydet

$$\mathbf{A} : \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{A} : \mathbf{B}^{\nabla J} \qquad \text{ja} \qquad \dot{\mathbf{A}} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^{\nabla J} : \mathbf{B}. \tag{45}$$

Tensorit $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ja $\mathbf{I}$ ovat symmetrisia ja toteuttavat kertolaskun kommutatiivisuusehdon, joten

$$\dot{I}_1(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} : \mathbf{I} \tag{46}$$

Toisen invariantin materiaaliseksi aikaderivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}
\dot{I}_2(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\big((\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) - \boldsymbol{\sigma}^T : \boldsymbol{\sigma}\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(2(\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T : \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T : \dot{\boldsymbol{\sigma}}\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(2(\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) - \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\big) \\
&= (\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) - (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{I}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Jaumannin derivaatan määritelmää ja trace-operaation ominaisuuksia käyttäen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{I} &= \mathrm{tr}\big((\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T)\boldsymbol{\sigma}\big) \\
&= \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}) = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{I}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Saadaan siis pyydetty tulos

$$\dot{I}_2(\boldsymbol{\sigma}) = (\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) - (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{I} = (\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} : \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) - (\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{I}. \tag{49}$$

Kolmannen invariantin materiaaliseksi aikaderivaataksi saadaan

$$\dot{I}_3(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\det(\boldsymbol{\sigma}) = \det(\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{\sigma}^{-T} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = I_3\,\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1}). \tag{50}$$

Tämän lausumiseksi Jaumannin aikaderivaatan avulla käytetään Jaumannin derivaatan määritelmää ja trace-operaation ominaisuuksia.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1}) &= \mathrm{tr}\big((\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T)\boldsymbol{\sigma}^{-1}\big) \\
&= \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}^{-1}) - \mathrm{tr}(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{-1}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}^{-1}) \\
&= \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}^{-1}) - \mathrm{tr}(\mathbf{W}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}) \\
&= \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}^{-1}) = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}^{-1}) : \mathbf{I}.
\end{aligned} \tag{51}$$

Saadaan siis tulos

$$\dot{I}_3(\boldsymbol{\sigma}) = I_3\,\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1}) = I_3\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1}). \tag{52}$$

Tehtävän kohdassa (b) tuli osoittaa Cauchyn jännityksen materiaalisen aikaderivaatan olessa deviatorinen myös jännityksen Jaumannin derivaatan olevan deviatorinen. Yleinen toisen kertaluvun tensori $\mathbf{A}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{A} = \alpha\mathbf{I} + \mathrm{dev}\mathbf{A}, \qquad \alpha = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{A}), \tag{53}$$

missä $\alpha\mathbf{I}$ on tensorin pallo-osa ja $\mathrm{dev}\mathbf{A}$ deviaatio-osa. Yllä olevasta saadaan tensorin deviaatio-osaksi

$$\mathrm{dev}\mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I}. \tag{54}$$

Cauchyn jännitystensorin materiaalisen aikaderivaatan ollessa deviatorinen pätee siis

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathrm{dev}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = 0. \tag{55}$$

Ottamalla trace Cauchyn jännityksen Jaumannin derivaatasta, sijoittamalla tähän yllä saatu tulos ja ottamalla huomioon tensorin $\mathbf{W}$ vinosymmetria saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}) &= \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathrm{tr}(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T) \\
&= -\mathrm{tr}(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T) \\
&= -\mathrm{tr}(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\mathbf{W}^T\boldsymbol{\sigma}) \\
&= -\mathrm{tr}(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) + \mathrm{tr}(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) = 0.
\end{aligned} \tag{56}$$

Saatiin siis tulos $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}) = 0$, kun $\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{dev}\boldsymbol{\sigma}$, joten jännityksen $\boldsymbol{\sigma}$ ollessa deviatorinen on myös jännityksen Jaumannin aikaderivaatta $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$deviatorinen.