Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
3. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
Liikkeeksi on annettu $x = X + Yt,\ y = Y + 1/2Xt$, joka matriismuodossa esitettynä on

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \mathbf{AX} \tag{1}$$

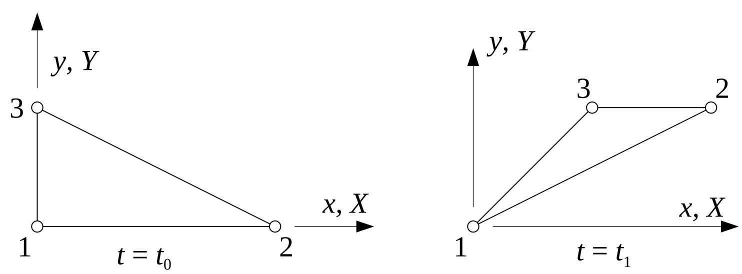
Elementin solmupisteiden materiaalikoordinaatit ovat

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Elementin solmupisteiden spatiaalikoordinaatit $\mathbf{x}$ ajanhetkellä $t = 1$ saadaan sijoittamalla pyydetty ajanhetki t ja solmupisteiden materiaalikoordinaatit (2) lausekkeeseen (1), jolloin saadaan

$$\mathbf{x}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

Elementti ajanhetkillä $t = t_0 = 0$ ja $t = t_1 = 1$ on esitetty kuvassa (1).



Kuva 1: Tarkasteltava elementti ajanhetkillä $t = 0$ ja $t = 1$.

Muodonmuutosgradientiksi saadaan

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t/2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

*Green*in-*Lagrange*n venymätensoriksi saadaan (3.3.5)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & t/2 \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t/2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} t^2 & 6t \\ 6t & 4t^2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Venymistensori on (3.7.5)

$$\mathbf{U} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{1/2} = \sqrt{\mathbf{C}}. \tag{6}$$

Hetkellä $t = 1$ saadaan oikeanpuoleiseksi *Cauchy*n-*Green*in muodonmuutostensoriksi

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Neliöjuuren ottamiseksi on laskettava tensorin $\mathbf{C}$ ominaisarvot ja -vektorit. Ominaisarvoiksi ja vastaaviksi ominaisvektoreiksi saadaan

$$\lambda_1 = 0.0788, \quad \mathbf{n}_1 = \begin{Bmatrix} -0.7882 \\ 0.6154 \end{Bmatrix} \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = 3.1712, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{Bmatrix} 0.6154 \\ 0.7882 \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Venymistensoriksi saadaan näin ollen

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\lambda_i}\, \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} 0.8489 & 0.7276 \\ 0.7276 & 1.2127 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Venymistensorin voi myös laskea matriisikertolaskulla muodostamalla matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{H}$ oppikirjan kohdan (E3.10.14) mukaisesti. Kun $\mathbf{U}$ on selvillä, saadaan kiertymätensori laskettua helposti yhteydestä

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9701 & 0.2425 \\ -0.2425 & 0.9701 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Elementin siirtymäkenttä on

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ t/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

Siirtymän $\mathbf{u}$ avulla saadaan nopeudeksi materiaalikoordinaattien avulla lausuttuna

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y \\ X/2 \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

Kiihtyvyydeksi saadaan

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{13}$$

Venymänopeustensori voidaan laskea usealla tavalla. Käytetään tässä tapauksessa yhteyttä (3.3.22)

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2(2 - t^2)} \begin{bmatrix} -2t & 3 \\ 3 & -2t \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Hetkellä $t = 1$ saadaan

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

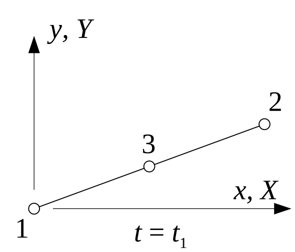
Jacobin determinantti on

$$J = \det(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{t^2}{2}. \tag{16}$$

Todetaan Jacobin determinantin olevan suurempi kuin nolla, kun $t < \sqrt{2}$. Hetkellä $t = \sqrt{2}$ on $J = 0$ ja elementin solmukoordinaateiksi saadaan

$$\mathbf{x}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{17}$$

Kuvassa (2) on esitetty tilanne hetkellä $t = \sqrt{2}$. Tällöin on kolmas solmu siirtynyt solmujen yksi ja kaksi väliselle suoralle. Elementti on surkastunut viivaksi ja sen pinta-ala on nolla.



Kuva 2: Tarkasteltava elementti ajanhetkellä $t = \sqrt{2}$.

Teht. 2
Nyky- ja referenssitilan pintanormaalien välillä on *Nanson*in kaavaksi kutsuttu yhteys (3.4.5), jonka mukaan

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma = J\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}\mathrm{d}\Gamma_0. \tag{18}$$

Muunnetaan tätä yhteyttä käyttäen tehtävän integraali nykytilasta referenssitilaan, jolloin saadaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S g\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_0} gJ\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}\mathrm{d}S_0. \tag{19}$$

Referenssitilassa ei integrointialue ole ajasta riippuva, joten aikaderivointi voidaan viedä integraalin sisään. Suorittamalla derivointi integraalin sisällä saadaan

$$\int_{S_0} (\dot{g}J\,\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} + g\dot{J}\,\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} + gJ\,\mathbf{n}_0 \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1})\,\mathrm{d}S_0. \tag{20}$$

Nopeus- ja muodonmuutosgradientin välistä yhteyttä $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ (3.3.18) hyväksi käyttäen saadaan

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I} \;\Rightarrow\; \dot{\mathbf{F}}^{-1}\mathbf{F} + \mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{L}. \tag{21}$$

Integraalin (20) viimeinen termi voidaan näin ollen kirjoittaa

$$gJ\,\mathbf{n}_0 \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1} = -gJ\,\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{L}) = -gJ\,(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{L})^T\mathbf{n}_0 = -gJ\,\mathbf{L}^T\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_0 = -gJ\,\mathbf{L}^T\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}. \tag{22}$$

Sijoittamalla yllä saatu tulos sekä Jacobin determinantin aikaderivaatta $\dot{J} = J\,\mathrm{div}\mathbf{v}$ (3.2.25) lausekkeeseen (20) saadaan

$$\int_{S_0} \big((\dot{g}J + gJ\,\mathrm{div}\mathbf{v})\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} - gJ\,\mathbf{L}^T\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}\big)\,\mathrm{d}S_0 = \int_{S_0} \big((\dot{g} + g\,\mathrm{div}\mathbf{v})\mathbf{I} - g\,\mathbf{L}^T\big)J\,\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}\,\mathrm{d}S_0. \tag{23}$$

Käyttämällä jälleen Nansonin kaavaa muunnetaan yllä oleva integraali nykytilaan, jolloin saadaan

$$\int_{S_0} \big((\dot{g} + g\,\mathrm{div}\mathbf{v})\mathbf{I} - g\,\mathbf{L}^T\big)J\,\mathbf{n}_0 \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1}\,\mathrm{d}S_0 = \int_{S} \big((\dot{g} + g\,\mathrm{div}\mathbf{v})\mathbf{I} - g\,\mathbf{L}^T\big)\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{24}$$

Saatiin siis pyydetty yhteys

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S g\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_{S} \big((\dot{g} + g\,\mathrm{div}\mathbf{v})\mathbf{I} - g\,\mathbf{L}^T\big)\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{25}$$

Teht. 3
Oppikirjan yhtälöstä (3.3.4) saadaan tuttu muodonmuutosgradientin ja Greenin-Lagrangen venymätensorin välinen yhteys

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}), \tag{26}$$

josta derivoimalla ajan suhteen

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}). \tag{27}$$

Käyttämällä hyväksi yhteyttä $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X}$ saadaan

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X}. \tag{28}$$

Tämän aikaderivaatta on

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathrm{d}s^2) = \frac{\partial}{\partial t}\,(\mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X}) = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot (\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}})\,\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot (2\,\dot{\mathbf{E}})\,\mathrm{d}\mathbf{X}. \tag{29}$$

Käyttämällä yhteyttä $\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ saadaan tästä

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathrm{d}s^2) = \mathrm{d}\mathbf{X}\cdot(2\,\dot{\mathbf{E}})\,\mathrm{d}\mathbf{X} = (\mathbf{F}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{x})\cdot 2\dot{\mathbf{E}}\,(\mathbf{F}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{x}) = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{30}$$

Toisaalta oppikirjan yhtälön (3.3.12) mukaan on

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{d}s^2) = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall\ \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{31}$$

Vertaamalla yhtälöitä (29) ja (31) päädytään pyydettyyn tulokseen

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T}\cdot\dot{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{F}^{-1}. \tag{32}$$

Teht. 4
Toisen kertaluvun tensorin $\mathbf{A}$ *Jaumann*in aikaderivaatta on määritelty (B3.5.1)

$$\mathbf{A}^{\nabla J} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{W}^T, \tag{33}$$

missä $\mathbf{W}$ on nopeusgradientin vinosymmetrinen osa. Jaumannin aikaderivaatan määritelmää käyttäen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\nabla J}:\mathbf{B} + \mathbf{A}:\mathbf{B}^{\nabla J} &= (\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{W}^T):\mathbf{B} + \mathbf{A}:(\dot{\mathbf{B}} - \mathbf{W}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{W}^T) = \\ &= \dot{\mathbf{A}}:\mathbf{B} + \mathbf{A}:\dot{\mathbf{B}} - \lambda,\end{aligned} \tag{34}$$

missä on käytetty merkintää

$$\lambda = (\mathbf{W}\mathbf{A}):\mathbf{B} + (\mathbf{A}\mathbf{W}^T):\mathbf{B} + \mathbf{A}:(\mathbf{W}\mathbf{B}) + \mathbf{A}:(\mathbf{B}\mathbf{W}^T). \tag{35}$$

Kaksoispistetulo voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ij}. \tag{36}$$

Käyttämällä nyt hyväksi edellä esitettyjä kaksoispistetulon laskusääntöjä ja vinosymmetrisen tensorin ominaisuutta $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$ voidaan termi λ kirjoittaa

$$\begin{aligned}\lambda &= \mathrm{tr}\big((\mathbf{W}\mathbf{A})^T\mathbf{B}\big) + \mathrm{tr}\big((\mathbf{A}\mathbf{W}^T)^T\mathbf{B}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathbf{A}^T(\mathbf{W}\mathbf{B})\big) + \mathrm{tr}\big(\mathbf{A}^T(\mathbf{B}\mathbf{W}^T)\big) = \\ &= \mathrm{tr}\big(\mathbf{A}^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathbf{W}\mathbf{A}^T\mathbf{B}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{B}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}^T\big) = \\ &= -\mathrm{tr}\big(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{B}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathbf{W}\mathbf{A}^T\mathbf{B}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{B}\big) - \mathrm{tr}\big(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}\big) = \\ &= \mathrm{tr}(\mathbf{W}\mathbf{A}^T\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}) = 0.\end{aligned} \tag{37}$$

Saadaan siis pyydetty tulos

$$\mathbf{A}^{\nabla J}:\mathbf{B} + \mathbf{A}:\mathbf{B}^{\nabla J} = \dot{\mathbf{A}}:\mathbf{B} + \mathbf{A}:\dot{\mathbf{B}}. \tag{38}$$

Kirjoitetaan tehtävän (b) kohdassa tarkasteltava lauseke

$$\mathbf{A}:\mathbf{B}^{\nabla J} = \mathbf{A}:(\dot{\mathbf{B}} - \mathbf{W}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{W}^T) = \mathbf{A}:\dot{\mathbf{B}} - (\mathbf{A}:\mathbf{W}\mathbf{B} + \mathbf{A}:\mathbf{B}\mathbf{W}^T). \tag{39}$$

Viimeinen suluissa oleva termi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{B}) + \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^T\mathbf{W}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}). \tag{40}$$

Nyt tensorit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ oletettiin symmetrisiksi ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T,\ \mathbf{B} = \mathbf{B}^T$) ja lisäksi oli voimassa $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}$. Näin ollen lausekkeesta (40) saadaan

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^T\mathbf{W}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{W}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{W}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{W}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{W}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{W}) = 0. \tag{41}$$

Päädyttiin siis pyydettyyn tulokseen

$$\mathbf{A} : \mathbf{B}^{\nabla J} = \mathbf{A} : \dot{\mathbf{B}}. \tag{42}$$

Koska $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A}$, pätee myös toinen lauseke

$$\mathbf{A}^{\nabla J} : \mathbf{B} = \dot{\mathbf{A}} : \mathbf{B}. \tag{43}$$

Kohdassa (c) piti osoittaa kohtien (a) ja (b) tulosten pätevän kaikilla muotoa

$$\mathbf{A}^{\nabla} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{\Omega}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{\Omega}^T \tag{44}$$

olevilla nopeuksilla. Tuloksia (a) ja (b) johdettaessa oli tensori $\mathbf{W}$ vinosymmetriaa lukuunottamatta mielivaltainen. Koska tensori $\mathbf{\Omega}$ on myös vinosymmetrinen, pätevät tulokset (a) ja (b) kaikille muotoa (44) oleville nopeuksille.