**Teknillinen korkeakoulu**
**Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet** (Mikkola/Ärölä)
**11. harjoituksen ratkaisut**

**Teht. 1**
Referenssitilan suureita käyttäen (kokonais-Lagrange) lausuttu ehto krittisen aika-asekelen pituudelle on (6.6.63)

$$\Delta t_{crit} \leq \min_e \frac{l_0^e}{c_0^e}, \qquad c_0^2 = \frac{F^2 C^{SE} + S_{11}}{\rho_0} \tag{1}$$

ja päivitetyn Lagrangen esityksen mukainen ehto puolestaan (6.6.61)

$$\Delta t_{crit} \leq \min_e \frac{l^e}{c^e}, \qquad c^2 = \frac{C^{\sigma \mathcal{T}} + \sigma_{11}}{\rho}\,. \tag{2}$$

Jotta molemmilla esitystavoilla päädyttäisiin samaan aika-askelen pituuteen, tulisi olla

$$\frac{l_0^e}{c_0^e} = \frac{l^e}{c^e}\,. \tag{3}$$

Yksiaksiaalisessa muodonmuutostilassa pätevät yhteydet $F = l/l_0 = \lambda_1 = J$. Käyttämällä hyväksi tangenttimodulien välistä yhteyttä (Box 5.1)

$$C^{SE} = J\lambda_1^{-4} C^{\sigma \mathcal{T}}, \qquad J = \lambda_1, \tag{4}$$

PK2 jännityksen ja Cauchyn jännityksen välistä yhteyttä (Box 3.2) $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$, sekä massansäilymisyhtälöä (2.2.10) $\rho J = \rho_0$ saadaan

$$c_0^2 = \frac{F^2 C^{SE} + S_{11}}{\rho_0} = \frac{J^2 \cdot J^{-3} C^{\sigma \mathcal{T}} + J \cdot J^{-1} \sigma_{11} J^{-1}}{J\rho} = \frac{C^{\sigma \mathcal{T}} + \sigma_{11}}{J^2 \rho} = \frac{c^2}{J^2}\,. \tag{5}$$

Ottamalla huomioon referenssitilan ja nykytilan pituuksien välinen yhteys $l = \lambda_1 l_0 = J\, l_0$ saadaan

$$\frac{l_0^e}{c_0^e} = \frac{l^e/J}{c^e/J} = \frac{l^e}{c^e}\;. \tag{6}$$

Näin ollen kumpikin esitystapaa johtaa samaan ehtoon krittisen aika-askelen pituudelle.

**Teht. 2**
Tasapainotilan lämmönjohtumisyhtälö on

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(K_{mn}\frac{\partial \theta}{\partial x_n}) = (K_{mn}\theta_{,n})_{,m} = 0, \tag{7}$$

jolla on äärettömän tarkastelualueen tapauksessa ratkaisu $\theta = \bar{\theta} = vakio$. Lisätään tasapainoratkaisuun ajasta riippuva häiriö $\tilde{\theta}$ jolloin saadaan

$$\theta(t) = \bar{\theta} + \tilde{\theta}(t) = \bar{\theta} + e^{\omega t + i\kappa \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}. \tag{8}$$

Epästationäärinen diffuusioyhtälö on

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - (K_{mn}\theta_{,n})_{,m} = 0. \tag{9}$$

Sijoittamalla tähän häiritty ratkaisu saadaan

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - (K_{mn}(\bar{\theta}_{,n} + \tilde{\theta}_{,n}))_{,m} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - (K_{mn}\tilde{\theta}_{,n})_{,m} = 0, \tag{10}$$

josta edelleen

$$\omega e^{\omega t+i\kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} - i^2\kappa^2 K_{mn}n_n n_m e^{\omega t+i\kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} = (\omega+\kappa^2 K_{mn}n_n n_m)e^{\omega t+i\kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} = 0. \tag{11}$$

Tästä saadaan

$$\omega + \kappa^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = -\kappa^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}. \tag{12}$$

Ehto ratkaisun stabiiliudelle on $Re(\omega) \leq 0$. Koska $-(\kappa^2) \leq 0\,\forall\kappa \in \mathbb{R}$, saadaan stabiilisuusehdoksi $\mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n} \geq 0$, missä $\mathbf{n}$ on mielivaltainen suunta. Diffuusiokerroinmatriisin $\mathbf{K}$ ollessa symmetrinen toteutuu kyseinen ehto, jos $\mathbf{K}$ positiivisemidefiniitti.

**Teht. 3**

Materiaalinen tangentiaalijäykkysmatriisi saadaan soveltamalla oppikirjan lausekeetta (6.4.13), jonka mukaan

$$\mathbf{K}_{IJ}^{mat} = \int_\Omega \mathbf{B}_I^T[\mathbf{C}^{\sigma\mathcal{T}}]\mathbf{B}_J\,\mathrm{d}\Omega. \tag{13}$$

Tangenttimodulimatriisi Voightin notaatiota käyttäen kirjoitteuna on

$$[\mathbf{C}^{\sigma\mathcal{T}}] = \begin{bmatrix} C_{1111}^{\sigma\mathcal{T}} & C_{1122}^{\sigma\mathcal{T}} & C_{1112}^{\sigma\mathcal{T}} \\ C_{2211}^{\sigma\mathcal{T}} & C_{2222}^{\sigma\mathcal{T}} & C_{2212}^{\sigma\mathcal{T}} \\ C_{1211}^{\sigma\mathcal{T}} & C_{1222}^{\sigma\mathcal{T}} & C_{1212}^{\sigma\mathcal{T}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Nelisolmuisen elementin muotofunktiot ovat (Appendix 3, A3.10)

$$N_I = \frac{1}{4}(1+\xi_I\xi)(1+\eta_I\eta), \tag{15}$$

missä $\xi_I$ ja $\eta_I$ ovat $\xi$ ja $\eta$ koordinaatit kantaelementin solmussa $I$. Muotofunktioiden derivaatat nykytilan koordinaattien suhteen ovat (4.4.42)

$$N_{I,\mathbf{x}}^T = [N_{I,x}\ N_{I,y}] = N_{I,\boldsymbol{\xi}}^T\mathbf{F}_\xi^{-1}, \tag{16}$$

missä $\mathbf{F}_\xi$ on kantaelementin ja nykytilan välinen muodonmuutosgradientti (4.4.40)

$$\mathbf{F}_\xi = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Sijoittamalla edelliseen lausekkeeseen koordinaatit $x$ ja $y$ lausuttuna elementin solmukoordinaatteja ja muotofunktioita käyttäen ja suorittamalla derivoinnit saadaan

$$\mathbf{F}_\xi = \frac{1}{4}\sum_{I=1}^{4}\begin{bmatrix} x_I\xi_I(1+\eta_I\eta) & x_I\eta_I(1+\xi_I\xi) \\ y_I\xi_I(1+\eta_I\eta) & y_I\eta_I(1+\xi_I\xi) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Tämän käänteismatriisi on

$$\mathbf{F}_\xi^{-1} = \frac{1}{J_\xi}\begin{bmatrix} y_{,\eta} & -x_{,\eta} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} \end{bmatrix}, \qquad J_\xi = x_{,\xi}y_{,\eta} - x_{,\eta}y_{,\xi}\,. \tag{19}$$

Solmuun $I$ liittyväksi matriisiksi $\mathbf{B}_I$ saadaan edellä laskettujen muotofunktioiden derivaattojen avulla

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Näistä saadaan koottua koko elementille $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$. Sijoittamalla edellä esitetyt tulokset materiaalisen tangenttimatriisin lausekkeeseen ja muuntamalla lausekkeessa esiintyvä nykytilan tilavuusintegraali kantaelementtialueeseen ($\mathrm{d}\Omega = J_\xi\,a\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$) saadaan

$$\mathbf{K}^{mat} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T[\mathbf{C}^{\sigma\mathcal{T}}]\mathbf{B}J_\xi\,a\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{21}$$

missä $a$ on elementin paksuus. Yleensä laskut suoritetaan yksikköpaksuutta kohti, jolloin asetetaan yksinkertaisesti $a = 1$. Geometrinen jäykkyysmatriisi saadaan oppikirjan lausekkeesta (6.4.14)

$$\mathbf{K}_{IJ}^{geo} = \mathbf{I}H_{IJ}, \qquad H_{IJ} = \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{B}}_I^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\mathcal{B}}_J \, \mathrm{d}\Omega, \tag{22}$$

Matriisi $\boldsymbol{\mathcal{B}}_I$ on (4.5.2)

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_I^T = N_{I,\mathbf{x}}^T = \left[ \begin{array}{cc} N_{I,x} & N_{I,y} \end{array} \right]. \tag{23}$$

Tarvittavat muotofunktioden derivaatat on laskettu jo materiaalista tangentiaalijäykkyyttä johdettaessa. Jännitystensori saadaan konstitutiivista yhteyttä käyttäen. Sijoittamalla edellä esitetyt lausekkeet ja ottamalla huomioon, että kyseessä on 2D tehtävä saadaan

$$\mathbf{K}_{IJ}^{geo} = \mathbf{I}_{2\times 2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \boldsymbol{\mathcal{B}}_I^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\mathcal{B}}_J J_\xi \, a \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta. \tag{24}$$

**Teht. 4**

Annettua konstitutiivista yhteyttä käyttäen saadaan tangenttimodulille lauseke

$$[C^{\sigma T}] = \left[ \begin{array}{ccc} \lambda' + 2\mu' & \lambda' & 0 \\ \lambda' & \lambda' + 2\mu' & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu' \end{array} \right], \qquad \lambda' = \frac{\lambda_0}{J}, \quad \mu' = \frac{\mu_0 - \lambda_0 \ln J}{J} \,. \tag{25}$$

Jännitys on puolestaan

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu_0}{J}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda_0}{J}(\ln J)\mathbf{I}, \tag{26}$$

missä $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ on vasemmanpuoleinen Cauchyn-Greenin muodonmuutostensori. Tämän laskemiseksi tarvitaan muodonmuutosgradienttia elementin integrointipisteissä. Tietokoneen rajallisesta sanapituudesta aiheutuvien pyöristysvirheiden välttämiseksi kannattaa muodonmuutosgradientti $\mathbf{F}$ laskea siirtymägradienttia $\mathbf{H}$ hyväksi käyttäen. Siirtymistä derivoimalla saadaan

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I}\,. \tag{27}$$

Siirtymägradientti elementin aluella saadaan lausuttua solmusiirtymiä $\mathbf{u}_I$ ja muotofunktioiden derivaattoja käyttäen muodossa

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_I \boldsymbol{\mathcal{B}}_{0I}^T, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}_{0I}^T = [N_{I,X} \; N_{I,Y}] = [N_{I,\xi} \; N_{I,\eta}] \, \mathbf{F}_{0\xi}^{-1}. \tag{28}$$

Kantaelementin ja referenssitilan välinen muodonmuutogradientti $\mathbf{F}_{0\xi}^{-1}$ ja sen käänteistensori saadaan laskettua asettamalla tehtävän 3 lausekkeessa (18) $\mathbf{x}_I = \mathbf{X}_I$. Integraalit elementin yli saadaan laskettua numeerisesti Gaussin kvadratuureja käyttäen. Oppikirjan yhtälöstä (4.5.21) saadaan 2D-tapauksen integointikavaksi

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta) \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \sum_{Q_1=1}^{n_{Q1}} \sum_{Q_2=1}^{n_{Q2}} w_{Q_1} w_{Q_2} f(\xi_{Q_1}, \eta_{Q_2}) \,. \tag{29}$$

Kahden pisteen kaavalla ovat integrointipisteiden koordinaatit $\xi_i = \pm 1/\sqrt{3}$ ja painokertoimet $w_i = 1$ (Kirjan liite, table A3.3). Tästä eteenpäin ratkaisu on edellä esitettyjen lausekkeiden kirjoittamista tietokoneelle. Laskenta suoritettiin MATLAB ohjelmistoa ja tiedostoja *h11t4.m* ja *muoto4.m* käyttäen. Kyseiset tiedostot on esitetty näiden ratkaisujen lopussa. Tuloksena saadaan pyydetyiksi matriiseiksi

$$\mathbf{K}^{mat} = \left[ \begin{array}{cccccccc} 159.30 & 49.93 & -79.89 & -20.04 & -48.29 & -56.60 & -31.13 & 26.71 \\ & 159.30 & 26.71 & -31.13 & -56.60 & -48.29 & -20.04 & -79.89 \\ & & 186.67 & -93.72 & -0.54 & -9.93 & -106.24 & 76.94 \\ & & & 182.73 & 25.47 & -45.36 & 88.29 & -106.24 \\ & & & & 94.18 & 41.06 & -45.36 & -9.93 \\ & & \mathit{symm.} & & & 94.18 & 25.47 & -0.54 \\ & & & & & & 182.73 & -93.72 \\ & & & & & & & 186.67 \end{array} \right], \tag{30}$$

$$
\mathbf{K}^{geo} = \begin{bmatrix}
3.04 & 0 & 5.58 & 0 & -14.20 & 0 & 5.58 & 0 \\
 & 3.04 & 0 & 5.58 & 0 & -14.20 & 0 & 5.58 \\
 & & -6.14 & 0 & -7.91 & 0 & 8.47 & 0 \\
 & & & -6.14 & 0 & -7.91 & 0 & 8.47 \\
 & & & & 30.02 & 0 & -7.91 & 0 \\
 & & symm. & & & 30.02 & 0 & -7.91 \\
 & & & & & & 0 & -6.14 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & -6.14
\end{bmatrix}. \tag{31}
$$

Laskennassa käytetyt MATLAB tiedostot:

**h11t4.m**

```
X = [0.0, 1.0, 1.0, 0.0; 0.0, 0.0, 1.0, 1.0]; %Alkutilan solmukoordinaatit
x = [0.0, 0.9, 1.2, 0.0; 0.0, 0.0, 1.2, 0.9]; %Nykytilan solmukoordinaatit

lam = 100.0; mu = 100.0;                      %Materiaalivakiot

XI = 1.0/sqrt(3.0)*[-1.0, 1.0];               %Integrointipisteiden koordinaatit
W =  [1.0 , 1.0];                             %Painokertoimet
a = 1.0;                                      %Elementin paksuus

Kmat = zeros(8,8); Kgeo = zeros(8,8); HH = zeros(4,4); %Taulukoiden alustus

U = x - X;                                   %Siirtymät

%Integrointi
for ipx = 1:2                                %suunta xi
    for ipy = 1:2                            %suunta eta
        xi = XI(ipx);  eta = XI(ipy);        %integrointipisteen koordinaatit
        w = W(ipx)*W(ipy);                   %painokerroin

        [N,J] = muotof4(X,xi,eta);           %Muotofunktiot ja derivaatat X:n ja Y:n suhteen
        H = zeros(2);                        %Siirtymägradientti
        for I = 1:4
            H = H + [U(1,I)*N(2,I), U(1,I)*N(3,I); U(2,I)*N(2,I), U(2,I)*N(3,I)];
        end

        F = H + eye(2);                      %Muodonmuutosgradientti
        B = F*F';                            %Vasemmanpuoleinen C-G def.tensori

        JF = det(F);                         %Muodonmuutosgradientin deteminatti

        if(JF <= 0)
            'Virhe: Jacobin determinantti nolla tai negatiivinen'
            pause
        end

        [N,J] = muotof4(x,xi,eta);           %Muotofunktiot ja derivaatat x:n ja y:n suhteen

        lam2 = lam/JF;  mu2 = (mu - lam*log(JF))/JF;  apu = lam2 + 2.0*mu2;

        C = [apu, lam2 ,0; lam2, apu, 0; 0, 0, 2.0*mu2]; %Konstitutiivinen matriisi
        Sig = mu/JF*(B-eye(2)) + lam/JF*log(JF)*eye(2);  %Jännitystensori

        B1 = [N(2,1), 0 ; 0, N(3,1); N(3,1), N(2,1)];
        B2 = [N(2,2), 0 ; 0, N(3,2); N(3,2), N(2,2)];
        B3 = [N(2,3), 0 ; 0, N(3,3); N(3,3), N(2,3)];
```

```
        B4 = [N(2,4), 0 ; 0, N(3,4); N(3,4), N(2,4)];
        B = [B1,B2,B3,B4];
        BB = N((2:3),:);

        Kmat = Kmat + B'*C*B*a*J*w;
        HH = HH + BB'*Sig*BB*a*J*w;
    end
end

for i = 1:4
    for j = 1:4
        Kgeo(2*i-1,2*j-1) = HH(i,j);
        Kgeo(2*i,2*j) = HH(i,j);
    end
end
K = Kmat + Kgeo;
```

### muotof4.m

```
function[N,J] = muotof4(x,xi,eta)

%==================================================================================================
%   Funktio muotof4(x,y,xi,eta) palauttaa nelisolmuisen elementin muotofunktioiden
%   ja niiden derivaattojen arvot, sekä Jacobin determinantin arvon elementin pisteessä (xi,eta)
%
%   Kutsuparametrit:
%   x = [x1, x2, x3, x4                 Elementin solmukoordinaatit
%        y1, y2, y3, y4]
%
%   xi & eta                            Kantaelementin piste, jossa arvot halutaan.
%
%   Funktio palauttaa:
%   N = [ N1   ,  N2   ,  N3   ,  N4      Taulukko, jossa ensimmäisellä rivillä
%        dN1dx, dN2dx, dN3dx, dN4dx     muotofunkioden arvot, toisella ja kolmannella rivillä
%        dN1dy, dN2dy, dN3dy, dN4dy];   derivaatat x:n ja y:n suhteen.
%
%   J                                   Jacobin determinatti
%==================================================================================================

% Muotofunktiot ja niiden derivaatat xi:n ja eta:n suhteen
Nxy = [(1-xi)*(1-eta), (1+xi)*(1-eta), (1+xi)*(1+eta), (1-xi)*(1+eta);
       -1+eta        , 1-eta         , 1+eta         , -1-eta        ;
       -1+xi         , -1-xi         , 1+xi          ,   1-xi         ];

Nxy = 0.25*Nxy;

% Jacobin matriisi
F = [0,0;0,0];
for I =1:4
    F = F + [x(1,I)*Nxy(2,I), x(1,I)*Nxy(3,I); x(2,I)*Nxy(2,I), x(2,I)*Nxy(3,I)];
end

%Jacobin matriisin determinantti ja käänteismatriisi
J = F(1,1)*F(2,2) - F(1,2)*F(2,1);
Finv = 1/J*[F(2,2), -F(1,2); -F(2,1), F(1,1)];

%Muotofunktioiden derivaatat x:n ja y:n suhteen
dNdx = [0,0,0,0]; dNdy = [0,0,0,0];
for I = 1:4
    dNdx(I) = Nxy(2,I)*Finv(1,1) + Nxy(3,I)*Finv(2,1);
```

```
    dNdy(I) = Nxy(2,I)*Finv(1,2) + Nxy(3,I)*Finv(2,2);
end

%Kerätään muotofunktiot ja derivaatat yhteen taulukkoon
N = [Nxy(1,:);dNdx;dNdy];
```