MS-C1420 Fourier-analyysi osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

29. tammikuuta 2014

Fourier-muunnoksia

- *Jatkuva-aikaisen jaksottoman signaalin muunnos:*

$$\hat{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} s(t)\, dt, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

- *Jaksollisen jatkuva-aikaisen signaalin muunnos (kun jakso on 1):*

$$\hat{s}(k) = \int_{0}^{1} e^{-i2\pi k t} s(t)\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- *Diskreetti Fourier-muunnos (diskreettiaikainen jaksollinen signaali):*

$$\hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{mj}{N}} \mathbf{s}(j), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

- *Diskreettiaikaisen ei-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos:* $\hat{\mathbf{s}}(\nu) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-i2\pi\nu j} \mathbf{s}(j)$.

Fourier-muunnos on lineaarinen, eli summan muunnos on muunnosten summa ja jos signaali kerrotaan luvulla niin muunnoskin tulee kerrotuksi samalla luvulla.

Eksponenttifunktio ja Eulerin kaava

Eksponenttifunktion määritelmäksi voidaan ottaa

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

ja merkinnän e^z *perusteluna on kaava* $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.
Vertaamalla sin*:n ja* cos*:n sarjakehitelmiin saadaan Eulerin kaava*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t),$$

missä siis i *on imaginaariyksikkö s.e.* $i \cdot i = -1$.
Erityisesti pätee $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = 1$, *ja* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k} = 1$, *kun* $k \in \mathbb{Z}$.
Kompleksiluvun $z = a + \mathrm{i}b$ *kompleksikonjugaatti* $\overline{z}$ *on* $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$ *joten esim.* $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$. *Kompleksikonjugointi on lineaarinen ja multiplikatiivinen joten pätee esim.* $\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\,\mathrm{d}t} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}}\,\overline{s(t)}\,\mathrm{d}t$

Fourier-muunnos

Jos $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ *ja s on mitallinen eli jatkuvien funktioiden raja-arvo melkein kaikkialla* *eli* $s \in L^1(\mathbb{R})$ *niin*

$$\hat{s}(\nu) = \mathcal{F}(s)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\nu} s(t)\,\mathrm{d}t, \quad \nu \in \mathbb{R}$$

Jos t on aika niin ν *on taajuus!*

Fourier-käänteismuunnos

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{s})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \mathcal{F}\big(\hat{s}\big)(-t) \overset{\nu=-\omega}{=} \mathcal{F}\big(\hat{s}(-\omega)\big)(t).$$

Kuten Fourier-muunnoksen määritelmässä ongelmana tässä (todistamisen lisäksi) on että jos $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\nu)|\,\mathrm{d}\nu = \infty$ *(niin kuin usein käy) ei ole heti selvää mitä integraalilla oikein tarkoitetaan mutta sopivilla määritelmillä tähänkin ongelmaan löytyy hyviä ratkaisuja*

Translaatiot, modulaatiot ja dilaatiot

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$ niin

$$\begin{aligned} g(t) = s(t-p) \quad &\Rightarrow \quad \widehat{g}(\nu) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu p}\hat{s}(\nu), \\ h(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi pt}s(t) \quad &\Rightarrow \quad \widehat{h}(\nu) = \hat{s}(\nu - p), \\ k(t) = s(at) \quad &\Rightarrow \quad \widehat{k}(\nu) = \frac{1}{|a|}\hat{s}\left(\frac{\nu}{a}\right). \end{aligned}$$

Oletus $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ ei ole tässä yhteydessä oleellinen muulla tavalla kuin että Fourier-muunnos on toistaiseksi määritelty väin tällaisille funktioille!

Miksi?

$$\begin{aligned} \hat{g}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t-p)\,\mathrm{d}t \overset{t-p=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu(\tau+p)} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu p} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu p}\hat{s}(\nu). \end{aligned}$$

Translaatiot, modulaatiot ja dilaatiot, jatk.

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi pt} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu-p)t} s(t)\,\mathrm{d}t = \hat{s}(\nu-p).$$

$$\hat{k}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(at)\,\mathrm{d}t \overset{at=\tau,\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\mathrm{d}\tau}{=} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\tau/a} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu/a)\tau} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{|a|}\hat{s}\left(\frac{\nu}{a}\right).$$

Huom!

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\hat{s}$ on jatkuva ja $\lim_{|\nu|\to\infty}\hat{s}(\nu) = 0$ mutta jokainen jatkuva funktio jonka raja-arvo äärettömyydessä on 0 ei ole integroituvan funktion Fourier-muunnos.

Fourier-muunnos ja derivaatta

Jos D on derivointioperaattori ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}$ tai $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$) niin

$$D(\mathcal{F}(s))(\nu) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi t)s(t))(\nu)$$

ja

$$\mathcal{F}(Ds)(\nu) = \mathrm{i}2\pi\nu\mathcal{F}(s)(\nu).$$

Miksi?

Yllä olevat kaavat pätevät, sopivin tulkinnoin, hyvin yleisesti ja jos esim. $(1+|t|)s(t) \in L^1(\mathbb{R})$ niin voidaan derivoida integraalin sisäpuolella jolloin saadaan

$$D(\mathcal{F}(s))(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}(-\mathrm{i}2\pi t)s(t)\,\mathrm{d}t.$$

Samoin jos esim. s ja $Ds \in L^1(\mathbb{R})$ ja $s(t) = s(0) + \int_0^t Ds(u)\,\mathrm{d}u$ saadaan osittaisintegroinnilla

$$\mathcal{F}(Ds)(\nu) = \Big/_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}2\pi\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}2\pi\nu\mathcal{F}(s)(\nu).$$

Nopeasti vähenevät funktiot

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k s^{(m)}(t)| < \infty, \quad k, m \geq 0 \right\}.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sisältää siis kaikki äärettömän monta kertaa derivoituvat funktiot, joiden kaikki derivaatat suppenevat kohti 0 nopeammin kuin jokainen muotoa t^{-k} oleva funktio kun $|t| \to \infty$ ja kaikki tyyppiä $t^k s^{(m)}(t)$ olevat funktiot ovat myös integroituvia. Esimerkkinä kelpaa hyvin funktio $h_0(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$.

Fourier-muunnos ja nopeasti vähenevät funktiot

Fourier-muunnos on bijektio: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, eli jos $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin $\hat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja jos $q \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin on olemassa täsmälleen yksi $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ siten, että $q = \hat{s}$.
Lisäksi pätee $(\mathrm{i}2\pi\nu)^k D^m(\mathcal{F}(s))(\nu) = \mathcal{F}\left(D^k\left((-\mathrm{i}2\pi t)^m s(t)\right)\right)(\nu)$ kaikilla k ja $m \geq 0$.

Konvoluutio

Jos g *ja* $h \in L^1(\mathbb{R})$ *niin* $g * h \in L^1(\mathbb{R})$ *ja* $\int_{-\infty}^{\infty} |(g*h)(t)| \, \mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \, \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t$ *missä*

$$(g * h)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t-u)h(u) \, \mathrm{d}u.$$

ja erityisesti pätee

$$\widehat{f * g}(\nu) = \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu).$$

Approksimointi konvoluutioilla

Jos $p \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} p(t) \, \mathrm{d}t = 1$, $p_a(t) = ap(at)$ *ja* $s \in L^1(\mathbb{R})$ *niin*

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - (p_a * s)(t)| \, \mathrm{d}t = 0,$$

ja jos lisäksi $\lim_{|t| \to \infty} tp(t) = 0$ *ja* s *on jatkuva pisteessä* t *niin*

$$\lim_{a \to \infty} (p_a * s)(t) = s(t).$$

Kertolaskukaava

Jos g ja $h \in L^1(\mathbb{R})$ niin

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)h(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} g(t)\hat{h}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Miksi?

Integroimisjärjestyksen vaihdolla saadaan

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)h(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} g(t)\,\mathrm{d}t\right) h(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} g(t)h(\nu)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} g(t)h(\nu)\,\mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} h(\nu)\,\mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(t)\hat{h}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Kertolaskukaava, erikoistapaus

Jos s ja $p \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t} p(-\nu)\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = (\hat{p} * s)(t)$.

Fourier-käänteismuunnos I

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ *niin*

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| s(t) - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) \mathrm{e}^{-\epsilon\nu^2} \, \mathrm{d}\nu \right| \mathrm{d}t = 0.$$

ja

$$s(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) \mathrm{e}^{-\epsilon\nu^2} \, \mathrm{d}\nu$$

kaikissa pisteissä t *missä* s *on jatkuva.*

Fourier-käänteismuunnos II

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ *ja* $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ *niin*

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) \, \mathrm{d}\nu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Neliöintegroituvat funktiot

Jos $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *on mitallinen ja* $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ *niin* $s \in L^2(\mathbb{R})$. *Pätee* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ *mutta* $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$ *ja* $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

Monissa sovelluksissa $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ *on signaalin energia tai ainakin verrannollinen energiaan.*

Merkitään $\|s\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

Fourier-muunnos ja $L^2(\mathbb{R})$ I

Jos g *ja* $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *niin*

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{h(t)} \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)\overline{\hat{h}(\nu)} \, \mathrm{d}\nu.$$

Fourier-muunnos ja $L^2(\mathbb{R})$ II

Jos $s \in L^2(\mathbb{R})$ niin on olemassa funktio $\hat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ siten, että jos jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ kun $n \geq 1$ on sellainen, että $\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ niin $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{s_n} - \hat{s}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$. Lisäksi pätee $\|s\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{s}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ eli

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)|^2 \, \mathrm{d}\nu.$$

ja jos g ja $h \in L^2(\mathbb{R})$ niin

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{h(t)} \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)\overline{\hat{h}(\nu)} \, \mathrm{d}\nu.$$

Huom!

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *niin* $\hat{s}$ *tulee määritellyksi kahdella eri tavalla, toisaalta suoraan integraalina koska* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *ja toisaalta raja-arvona* $\lim_{n\to\infty} \widehat{s_n}$, *missä* $s_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *mutta nämä määritelmät antavat saman tuloksen.*

Jos $s \in L^2(\mathbb{R})$ *niin pätee myös*

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{s}(\nu) - \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\,\mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}\nu = 0.$$

Diskreetti Fourier-muunnos

Jos N on positiivinen kokonaisluku niin lukujen $\mathbf{s}(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ diskreetti Fourier-muunnos on

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{s})(m) = \hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{N}} \mathbf{s}(j), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Huom!

- *Diskreetti Fourier-muunnos määritellään usein kaavoilla* $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{N}} \mathbf{s}(j)$ *tai* $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{N}} \mathbf{s}(j)$. *Valittu määritelmä vaikuttaa vain siihen missä kohdissa muissa kaavoissa luku N esiintyy.*
- *Koska* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j} = 1$ *kun j on kokonaisluku, niin Fourier-muunnos $\hat{\mathbf{s}}$ on jaksollinen jaksolla N, eli* $\hat{\mathbf{s}}(m+N) = \hat{\mathbf{s}}(m)$. *On hyödyllistä olettaa, että myös luvut* $\mathbf{s}(j)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ *ovat osa jaksollista jonoa* $\mathbf{s}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$ *missä* $\mathbf{s}(j+N) = \mathbf{s}(j)$ *kaikilla j. Silloin diskreetti Fourier-muunnos voidaan laskea myös kaavalla* $\hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{j=j_1}^{j_2} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{N}} \mathbf{s}(j)$ *missä* $j_2 - j_1 = N-1$.

Diskreetin Fourier-muunnoksen käänteismuunnos

$\mathcal{F}_N$ on bijektio N-jaksollisten jonojen välillä ja

$$\mathbf{s}(m) = (\mathcal{F}_N^{-1}(\hat{\mathbf{s}}))(m) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{N}}\hat{\mathbf{s}}(j)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{N}}\hat{\mathbf{s}}(-m) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{N}}\hat{\mathbf{s}}(\mathrm{mod}(-j,N))$$

eli $\mathcal{F}_N^{-1} = \frac{1}{N}R\mathcal{F}_N = \frac{1}{N}\mathcal{F}_N R$ missä $(R\hat{\mathbf{s}})(m) = \hat{\mathbf{s}}(-m)$.

FFT

FFT on algoritmi, jolla diskreetti Fourier-muunnos lasketaan käyttäen $cN\log(N)$ laskutoimitusta eikä $c'N^2$ niin kuin suoraviivainen lasku edellyttäisi.

Fourier-integraalin numeerinen laskeminen

Olkoon s reaaliakselilla $\mathbb{R}$ *määritelty funktio josta tunnetaan arvot pisteissä* $t_0 + j\Delta t$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ *(missä oletetaan, että* $\Delta t > 0$*). Jos nyt p on sellainen* $\mathbb{R}$*:llä funktio, että* $p(0) = 1$ *ja* $p(j) = 0$ *kun* $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*, niin funktio*

$$g(t) = \sum_{j=0}^{N-1} s(t_0 + j\Delta t) p\left(\frac{t - t_0 - j\Delta t}{\Delta t}\right),$$

toteuttaa ehdot

$$g(j\Delta t + t_0) = s(t_0 + j\Delta t), \quad j = 0, \ldots, N-1,$$

ja $g(t_0 + j\Delta t) = 0$ *kun* $j < 0$ *tai* $j > N-1$*.*

Usein on tarkoituksenmukaista vaatia, että myös $\int_{\mathbb{R}} p(t)\,\mathrm{d}t = 1$ *ja joskus voi olla syytä luopua interpolointiehdosta* $p(0) = 1$ *ja* $p(j) = 0$ *kun* $j \neq 0$*.*

Perusidea on nyt, että s:n Fourier-muunnoksen sijasta lasketaan g:n Fourier-munnos ja erityisen hyvin se onnistuu pisteissä $m\Delta\nu$, $m \in \mathbb{Z}$ *missä*

$$\Delta t \Delta\nu = \frac{1}{N}.$$

Fourier-integraalin numeerinen laskeminen, jatk.

Jos nyt valitaan

$$\mathbf{q}(j) = s(t_0 + j\Delta t), \quad j = 0, \dots, N-1,$$

niin

$$\hat{g}(m\Delta\nu) = \Delta t e^{-i2\pi m \Delta\nu t_0} \hat{\mathbf{q}}(m) \hat{p}\left(\frac{m}{N}\right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Funktion p valinnaksi on monta vaihtoehtoa:

- *Lineaarinen interpolointi:* $p(t) = \max\{0, 1 - |t|\}$ *jolloin* $\hat{p}(\nu) = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$.
- *Kuutiosplini-interpolointi jolloin* $\hat{p}(\nu) = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^4 \frac{1}{1 - \frac{2}{3}\sin(\pi\nu)^2}$.
- sinc-*interpolointi:* $p(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ *jolloin* $\hat{p}(\nu) = 1$ *kun* $|\nu| < \frac{1}{2}$ *ja* $\hat{p}(\nu) = 0$ *kun* $|\nu| > \frac{1}{2}$.

Miksi?

Koska $\Delta\nu = \frac{1}{N\Delta t}$ *niin*

$$\hat{g}(m\Delta\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi m\Delta\nu t} g(t)\,dt$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{q}(j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi m\Delta\nu t} p\left(\frac{t - t_0 - j\Delta t}{\Delta t}\right) dt \overset{t = t_0 + j\Delta t + \tau\Delta t}{=}$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{q}(j)\Delta t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi m\Delta\nu t_0} e^{-i2\pi m\Delta\nu j\Delta t} e^{-i2\pi m\Delta\nu\Delta t\,\tau} p(\tau)\,d\tau$$

$$= \Delta t e^{-i2\pi m\Delta\nu t_0} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi mj}{N}} \mathbf{q}(j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \frac{m}{N}\tau} p(\tau)\,d\tau$$

$$= \Delta t e^{-i2\pi m\Delta\nu t_0} \hat{\mathbf{q}}(m)\hat{p}\left(\frac{m}{N}\right).$$

Jaksolliset funktiot, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jne

- *Funktio* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *on jaksollinen jaksolla* 1 *jos* $s(t+1) = s(t)$ *kaikilla* $t \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *on ekvivalenssiluokkien* $\{\, t+n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z} \,\}$ *muodostama joukko eli joukko* $\mathbb{R}$ *missä pisteet* t *ja* $t+n$ *on samaistettu kun* $n \in \mathbb{Z}$.
- *Jokaista funktiota* $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *voidaan käsitellä jaksollisena funktiona* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ja päinvastoin ja näin tässä tullaan tekemäänkin.*
- *Välillä* $[0, 1)$ *määritellystä funktiosta* s *saadaan jaksollinen funktio* $s(\mathrm{mod}\,(t, 1))$. *Tästä seuraa, että joukko* $L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *missä joka sisältää kaikki jaksolliset (jaksolla* 1*)* *ja mitalliset* *funktiot* s, *joilla* $\int_0^1 |s(t)|^p \,\mathrm{d}t < \infty$ *missä* $1 \le p < \infty$ *on sama kuin joukko* $L^p([0, 1))$, *mutta huomaa, että jos* $s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/Z)$ *eli* s *on jatkuva ja jaksollinen niin* s *on jatkuva välillä* $[0, 1]$ *ja* $s(0) = s(1)$.

Jaksollisen funktion Fourier-kertoimet

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin*

$$\hat{s}(k) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Huom!

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin funktioden* s *ja* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}$ *jaksollisuudesta seuraa, että Fourier-kertoimet saadaan myös kaavoilla*

$$\hat{s}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{1-a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jaksolliset funktiot jaksolla T

Jos s:n jakso on T eli $s(t+T)=s(t)$ kaikilla $t\in\mathbb{R}$ niin funktio $g(t)=s(tT)$ on jaksollinen jaksolla 1 ja muuttujan vaihdon jälkeen todetaan, että g:n (eli yhtä hyvin s:n) Fourier-kertoimiksi tulee

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kt}{T}} s(t)\,\mathrm{d}t.$$

Riemann-Lebesguen lemma

Jos $s\in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ niin

$$|\hat{s}(k)|\le \|s\|_{L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})},\ k\in\mathbb{Z} \quad ja \quad \lim_{|k|\to\infty}\hat{s}(k)=0.$$

Huom!

"Fourier-analyysi" perustuu tuloksiin, joiden mukaan $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)e^{i2\pi kt}$ *"on"* $s(t)$ *mutta ongelma on mitä summalla tarkoitetaan. Tietyin oletuksin ongelmia ei ole, muissa tapauksissa sen sijaan on valittava sopiva tulkinta tai sitten todistuksista tulee hyvin hankalia.*

Fourier-sarjan suppeneminen, I

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *on derivoituva pisteessä* t_0 *tai jos pelkästään* $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|t|} |s(t+t_0) - s(t_0)| \, dt < \infty$ *niin*

$$\lim_{N,M\to\infty} \sum_{k=-M}^{N} e^{i2\pi kt_0}\hat{s}(k) = s(t_0).$$

Konvoluutio

Jos h ja $h \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin* $g *_1 h \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *missä*

$$(g *_1 h)(t) = \int_0^1 g(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u,$$

ja

$$\widehat{g *_1 h}(k) = \hat{g}(k)\hat{h}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tavallisesti kirjoitetaan $g * h$ *eikä* $g *_1 h$ *jos on selvää minkälaisesta konvoluutiosta on kyse.*

Itseisesti suppenevat Fourier-sarjat

Jos $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty$ *niin* $A(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja* $\widehat{A}(k) = a_k$.
Jos lisäksi $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin*

$$(A *_1 s)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \hat{s}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}.$$

Erikoistapaus: Fejerin ydin

$$F_N(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2, & t \in \mathbb{R} \setminus Z, \\ N, & t \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

missä $N = 1, 2, \ldots$.

- $\widehat{F_N}(k) = \max\left\{0, \frac{N-|k|}{N}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $F_N \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja* $F_N(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$
- $\int_0^1 F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1.$
- *Jos* $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, *niin* $\lim_{N\to\infty} \int_0^1 |(F_N *_1 s)(t) - s(t)|\,\mathrm{d}t = 0$ *ja jos* $s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin* $\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |(F_N *_1 s)(t) - s(t)| = 0.$

Fourier-sarjan suppeneminen II

Jos $s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=-N}^{N} \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt} - s(t) \right| = 0.$$

ja jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin*

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=-N}^{N} \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt} - s(t) \right| \mathrm{d}t = 0.$$

Fourier-muunnos on injektio

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja* $\hat{s}(k) = 0$ *kaikilla* $n \in \mathbb{Z}$ *niin* $s(t) = 0$ *melkien kaikilla* t.

Fourier-sarjan suppeneminen III

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{s}(k)| < \infty$ *niin* $s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja*

$$s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sisätulo $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:ssä

Jos g *ja* $h \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 g(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t.$$

$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ on Hilbert-avaruus

Jos funktioden sijasta tarkastellaan ekvivalenssiluokkia eli $g = h$ *jos ja vain jos* $g(t) = h(t)$ *melkein kaikilla* t*, niin silloin* $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *on Hilbert-avaruus eli täydellinen (eli jokainen Cauchy-jono suppenee) sisätuloavaruus (ja siten "samanlainen" joukko kuin taso* $\mathbb{R}^2$*, jossa sisätulo on* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2$*, kun 2:n paikalle tulee* ∞ *ja* $\mathbb{R}$*:n paikalle* $\mathbb{C}$*).*

Funktiot $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}$ muodostavat $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:n ortonormaalin kannan

Jos märitellään $e_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}$ *niin*

$$\langle e_m, e_k \rangle = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k, \end{cases}$$

ja jos $s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin*

$$\langle s, e_k \rangle = \int_0^1 s(t)\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}\,\mathrm{d}t = \hat{s}(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ja

$$s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle s, e_k \rangle\, e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k) e_k.$$

Funktiot $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}$ muodostavat $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:n ortonormaalin kannan

Jos märitellään $e_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}$ *niin*

$$\langle e_m, e_k \rangle = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k, \end{cases}$$

ja jos $s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin*

$$\langle s, e_k \rangle = \int_0^1 s(t)\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}\,\mathrm{d}t = \hat{s}(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ja

$$s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle s, e_k \rangle\, e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k) e_k.$$

Jos g *ja* $h \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin*

$$\int_0^1 g(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k)\overline{\hat{h}(k)} \quad \textit{ja erityisesti} \quad \int_0^1 |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{s}(k)|^2.$$

Fourier-sarjan suppeneminen IV

Jos $s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin jokaisella* $\epsilon > 0$ *on olemassa äärellinen joukko* $I \subset \mathbb{Z}$ *siten, että jos* $I \subset J \subset \mathbb{Z}$ *ja* J *on äärellinen niin*

$$\int_0^1 \left| s(t) - \sum_{k \in J} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt} \right|^2 \mathrm{d}t < \epsilon.$$

Toisin sanoen, sarja suppenee L^2*-mielessä ja kun lasketaan yhteen sarjan termit, järjestyksellä ei ole merkitystä, eli sarja on summautuva. Mutta sen sijaan sarja ei ole välttämättä itseisesti suppeneva.*