

Ville Turunen:

MS-C1420 Fourier-analyysi (5 opintopistettä)

Esitiedot: Lineaarialgebra 1, Differentiaali- ja integraalilaskenta 1.

1 Johdanto

Mitä Fourier-analyysi on? Fourier-analyysi on läsnä kaikkialla, missä esiintyy säännöllisyyttä tai symmetrioita. Fourier-analyysin avulla tutkitaan ilmiöitä esittämällä tarkasteltava funktio eli signaali yksinkertaisten värähtelyiden yhdistelmänä. Näin voidaan kuvailla erityisesti aaltoliikettä kuten ääntä tai sähkömagneettista säteilyä niin, että esimerkiksi puhesignaaleista ja kuvista voidaan poistaa ei-toivottua kohinaa. Fourier-menetelmiä käytetään niin klassisessa fysiikassa kuin kvanttimekaniikassakin, todennäköisyyslaskennassa ja tilastotieteissä ja yleensä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden sovelluksissa, sekä nopeassa numeerisessa laskennassa tietokoneilla. Fourier-analyysia tarvitaan myös hyvin abstrakteilla matematiikan aloilla kuten lukuteoriassa sekä funktioiden ominaisuuksien tutkimuksessa.

Historiaa: Fourier-analyysin idean esitteli vuonna 1807 Jean-Baptiste Fourier tarkastellessaan lämmönjohtumista. Diskreettiä Fourier-muunnosta oli kuitenkin pohtinut jo Carl Friedrich Gauss vuosina 1805–1806 trigonometrisen interpolaaation laskelmissaan, missä hän jopa kuvaili FFT-algoritmin kauan ennen kuin Cooley ja Tukey sen lopulta vuonna 1965 julkaisivat: Gauss sovelsi menetelmäänsä asteroidi Junon radan ennustamiseen. Fourier-analyysia ennakoivat 1700-luvulla Leonhard Euler, Alexis-Claude Clairaut, Joseph Louis Lagrange ja Daniel Bernoulli tutkiessaan värähteleviä kappaleita ja kiertoratoja.

Esimerkkejä Fourier-analyysin sukulaiskursseista Aalto-yliopistolla: MS-C1350 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, MS-E1421 Harmonic analysis, MS-E1220 Symmetries, MS-C1110 Lukuteoria.

Merkinnät. Fourier-analyysia käytetään laajalti tieteissä ja insinöörialoilla, ja kukin ala käyttää omia perinteisiä merkintöjään: esimerkiksi

f voi olla signaali tai taajuus,

x voi olla paikka tai signaali,

imaginaariyksikkö voi olla i tai j .

Sekaannusten välttämiseksi sovimme nyt tällä kurssilla seuraavat merkinnät:

signaali on s (joskus myös q tai r),

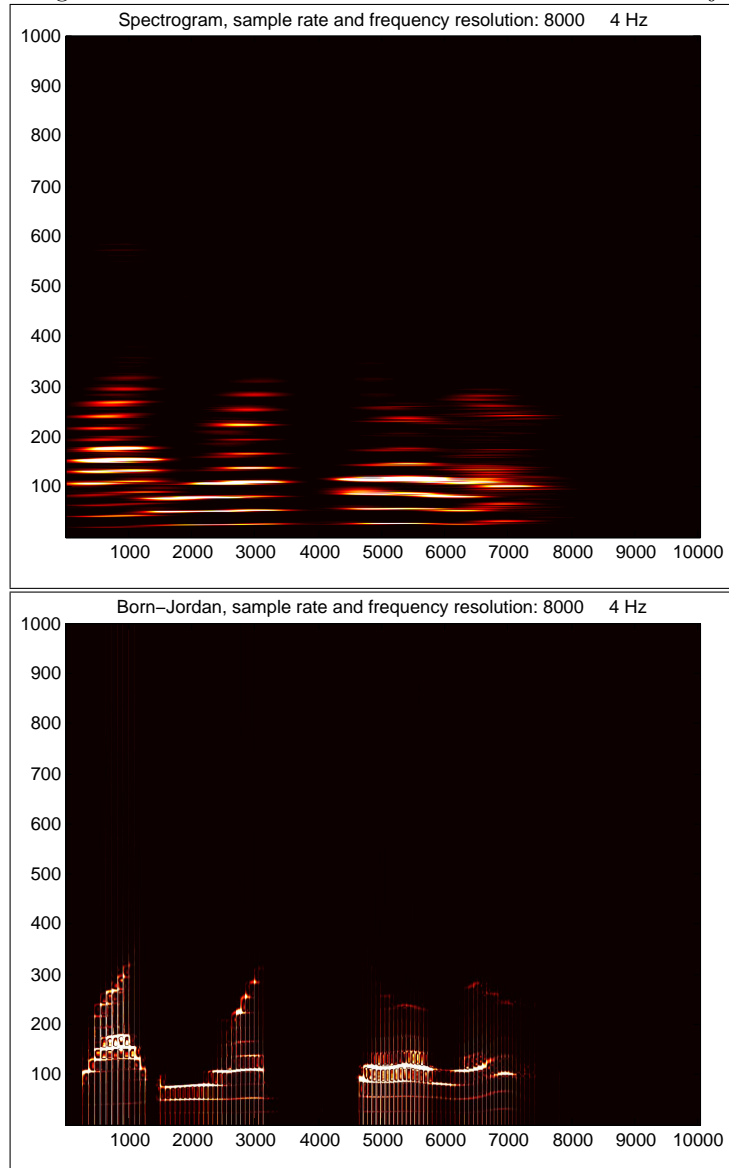
aika on t (aikamuuttuja voidaan joskus tulkita myös paikaksi),

taajuus on ν (kreikkalainen “nyy”-kirjain),

imaginaariyksikkö on i (jolle $i^2 = -1$).

2 Fourier-esimerkkejä akustiikassa

Fourier-analyysin avulla äänisignaali voidaan esittää eräänlaisena matemaattisena nuottikirjoituksena: Seuraavat kuvat esittävät samaa ihmisääntä niin, että vaaka-akselilla on aika, pystyakselilla taajuus, ja signaalin energiatiheys on verrannollinen kirkkauteen. Ylemmässä kuvassa on ikkunoidun Fourier-muunnoksen spektrogrammi. Alemmassa kuvassa on vastaava Born–Jordan -jakauma.



Tällaisten `Matlab`-kuvien avulla voidaan esimerkiksi parantaa signaalin laatua ja poimia siitä yksityiskohtia hyödynnettäväksi.

3 Signaalit ja niiden luokittelu

Tällä kurssilla jaamme signaalit kahteen luokkaan:

- (A) **Analogiset** $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (jatkuva aika \mathbb{R}),
- (D) **Digitaaliset** $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ (diskreetti aika \mathbb{Z}).

Jaamme nämä luokat vielä kahtia: signaali voi olla

- joko* (0) **jaksoton**
- tai* (1) **jaksollinen** (*eli periodinen*).

Sanomme, että signaalilla s on jakso (eli periodi) p , jos

$$s(t - p) = s(t)$$

jokaisella t . Siten meillä on neljä luokkaa signaaleja: (A0), (A1), (D0), (D1). Jokaisessa näistä neljästä tapauksesta on oma Fourier-analyysinsä, jotka ovat keskenään hyvin samankaltaisia, kuten tullaan näkemään:

Tapaus : Fourier – muunnoksen nimi :

- (A0) *Fourier (integral) transform / Fourier – (integraali)muunnos,*
- (A1) *Fourier coefficient transform / Fourier – kerroinmuunnos,*
- (D0) *(DTFT) Discrete Time Fourier Transform / Diskreetin ajan Fourier – muunnos,*
- (D1) *(DFT) Discrete Fourier Transform / Diskreetti Fourier – muunnos.*

Opimme näiden käsitteiden väliset yhteydet tutustumalla niiden perusominaisuuksiin ja sovelluksiin. Laskemme kynällä ja paperilla sekä **MatLab**-ohjelmalla.

Yleisemmin: kun $d \in \mathbb{Z}^+$, ovat d -dimensioiset signaalit funktioita

$$s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tai} \quad s : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C},$$

mutta näiden käsittely palautuu 1-dimensioiseen tapaukseen. d -dimensioinen muuttuja voi sovelluksissa sisältää koordinaatteinaan aikaa, paikkaa tai muuta sellaista. Signaalin arvoina voidaan tarkastella muutakin kuin kompleksilukuja (esimerkiksi vektoreita tai matriiseja), mutta tällaista meidän ei tarvitse pohtia tällä kurssilla. Digitaalisessa signaalissa on arvojen joukko vielä yleensä “kvantisoitu”, mutta emme myöskään käsittele kvantisoinnin ongelmia.

Esim. Ääni: $s(t)$ on ilmanpaine hetkellä $t \in \mathbb{R}$. Digitaalinen monofoninen äänite: mitataan ilmanpaineesta tasaisin väliajoin 44100 näytettä sekunnissa, saadaan digitaalinen signaali.

Esim. Mustavalkoinen kuva: 2-dimensioinen analoginen signaali s , nyt $s(x, y) \in [0, 1]$ on harmaasävyn aste tason pisteessä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (esim. 0 täysin valkoinen, 1 täysin musta, $1/2$ keskiharmaa...). Vastaava digitaalinen kuva: tässä digitaalisessa signaalissa $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ on pikselin sijainti. Tällainen kuvien Fourier-analyysi on olennaisesti samankaltainen kuin 1-dimensioisten signaalien.

Esim. Ihmisen silmässä on kolmea erityyppistä tappisolua — värivalokuva on monidimensioinen signaali, joka koostuu kolmesta analogisesta signaalista $s_{red}, s_{blue}, s_{green} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, missä $s_{red}(x, y)$ on tason pisteen (x, y) punasävyn aste jne. Digitaalinen värikuva: $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ kuten harmaasävyn digitaalisen kuvan tapauksessa.

Esim. Analogisessa videosignaalin mukana sekä ääni (mono, stereo tms.) että liikkuva (3-värinen) kuva, ja muuttujina aika $t \in \mathbb{R}$ sekä kuvapiste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Mitä on odotettavissa? Erilaisten Fourier-muunnosten idea on pohjimmiltaan samankaltainen: *Signaali* on “mukava” funktio $s : G \rightarrow \mathbb{C}$, missä muuttuja $t \in G$ on “aika” (tai “paikka”). Signaalin *Fourier-muunnos* on funktio $\hat{s} : G \rightarrow \mathbb{C}$, jonka arvo “taajuudella” $\nu \in \hat{G}$ on

$$\hat{s}(\nu) := \int_G s(t) e^{-i \text{vakio } t \cdot \nu} dt.$$

Alkuperäinen signaali saadaan takaisin käänteismuunnoksen kaavalla

$$s(t) = \int_{\hat{G}} \hat{s}(\nu) e^{+i \text{vakio } t \cdot \nu} d\nu.$$

Näissä kaavoissa integraali voi olla diskreetin muuttujan tapauksessa myös summaus, ja usein (mutta ei aina)

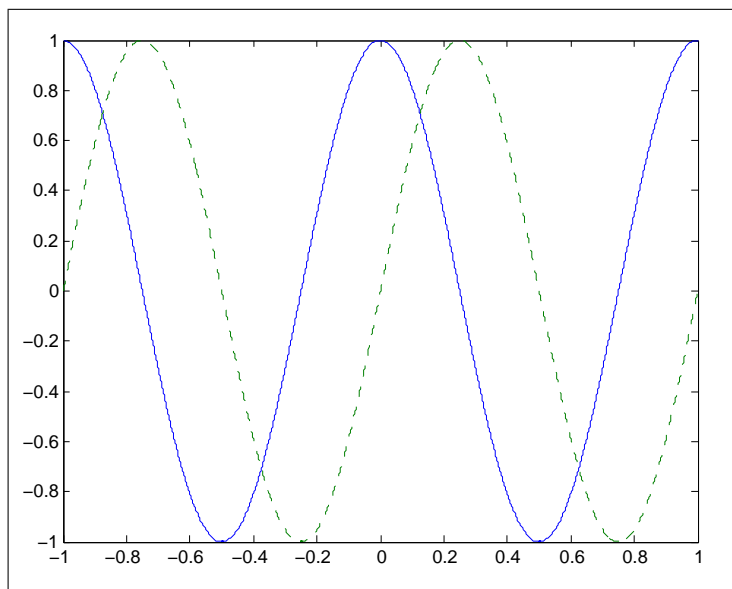
$$\text{vakio} = 2\pi.$$

Signaalien tutkimuksessa joitakin asioita kannattaa tehdä aikamuuttujalle, joi-takin puolestaan taajuusmuuttujalle!

Kurssin myötä hyvin tutuksi käy Eulerin kaava

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \tag{1}$$

jonka voi ymmärtää kompleksitason yksikköympyrän geometriana. Muistin virkistykseksi tässä vielä funktioiden $t \mapsto \cos(2\pi t)$ ja $t \mapsto \sin(2\pi t)$ kuvaajat yli värähtelyn kahden jakson (kumpi on kumpi?):



Mielikuvia pohdittavaksi: Jatkossa esiintyy usein funktio $e_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, missä $\nu \in \mathbb{R}$ on vakio ja

$$\begin{aligned} e_\nu(t) &:= e^{i2\pi t \cdot \nu} \\ &= \cos(2\pi t \cdot \nu) + i \sin(2\pi t \cdot \nu). \end{aligned}$$

Kannattaa ajatella, että tämä on (kompleksiarvoinen) alkeisvärähtely taajuudella $\nu \in \mathbb{R}$ ajan $t \in \mathbb{R}$ suhteen. Tämän voi havainnollistaa käytännössä: `Matlab`-ohjelmalla on helppo tehdä äänitiedosto funktion e_ν reaali- ja imaginaariosista, ja nämä kuulostavat määrätyn taajuisilta tasaisilta vihellyksiltä. Karkeasti ottaen signaali $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ muotoa

$$s(t) = e^{a(t)} \sin(2\pi\psi(t))$$

kuulostaa vihellykseltä, jonka “volyymi” on $a(t)$ ja taajuus $|\psi'(t)|$ hetkellä t (jos $a, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovat “hitaasti muuttuvia”).

Tehtävä. Miten osittaisintegrointi liittyy tulon derivaatan kaavaan

$$\frac{d}{dt} [r(t) s(t)] = r'(t) s(t) + r(t) s'(t) \quad ?$$

Tehtävä. Miten integraalin muuttujanvaihto liittyy derivaatan ketjusääntöön

$$\frac{d}{dt} s(\varphi(t)) = s'(\varphi(t)) \varphi'(t) \quad ?$$

Tehtävä. Perustele tasointegraalin muuttujanvaihtokaava

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, r \, d\theta \, dr$$

kartesisten koordinaattien (x, y) ja napakoordinaattien (r, θ) välillä.

Tehtävä. Pätee $e^{w+z} = e^w e^z$, kun $w, z \in \mathbb{C}$, ja tunnetaan myös *Eulerin kaava*

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t),$$

missä $t \in \mathbb{R}$ ja i on imaginaariyksikkö. Todista tämän avulla kaavat

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{i2},$$

$$\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 \quad \text{ja} \quad \sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t).$$

Tehtävä. Tarkista, että $t \mapsto \exp(-t^2)$ ratkaisee differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} s'(t) = -2t s(t), \\ s(0) = 1. \end{cases}$$

Miksi tällä ongelmalla ei ole muita ratkaisuja s ?

Vihje: Laske derivaatta $r'(t)$, kun $r(t) = \exp(t^2) s(t)$. Sovella *Integraalilaskennan peruslausetta*: “Jos derivaatta katoaa, niin funktio on vakio.”

4 Analoginen maailma: jatkuvan ajan muunnokset

Tällä kurssilla *analogisella signaalilla* tarkoitetaan funktiota

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

missä \mathbb{R} on *jatkuva aika-avaruus*. Jaksottomien analogisten signaalien tapauksessa Fourier-muunnosta kutsutaan *Fourier-integraalimuunnokseksi* (FT, Fourier (integral) Transform). Jaksollisten (eli periodisten) analogisten signaalien tapauksessa kutsutaan *Fourier-kerroinmuunnokseksi* (Fourier Coefficient Transform), jolle duaalinen on *Fourier-sarjamuunnos* (FST, Fourier Series Transform), joka on olennaisesti sama kuin digitaalisten signaalien diskreetin ajan Fourier-muunnos (DTFT, Discrete Time Fourier Transform).

4.1 Fourier-muunnos (Fourier transform) eli jaksottomien signaalien $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tapaus

Käytetään seuraavassa integraalille merkintää

$$\int_{\mathbb{R}} s(t) dt := \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 s(t) dt + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b s(t) dt.$$

Tällä kurssilla emme aio keskittyä siihen, missä mielessä kyseiset integraalit ovat olemassa tai laskettavissa — tällaisiin kysymyksiin tutustutaan opintojaksolla **MS-C1280 Mitta ja integraali** sekä **MS-E1421 Harmonic analysis**, joissa työkaluna käytössä on Lebesgue-integraali. Joissakin tilanteissa Lebesgue-integraalikaan ei riitä, vaan tarvitaan esimerkiksi tulkintaa distributioiden avulla. Nyt meille riittää peruskurssitasoinen käsitys integroinnista.

4.1.1 Signaalien avaruus $L^2(\mathbb{R})$

Jatkuvan ajan $t \in \mathbb{R}$ *äärellisen energian jaksoton signaali* on ns. neliöintegroituva funktio $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$: toisin sanoen signaalilla s on äärellinen “energia” $E(s) < \infty$, missä

$$E(s) := \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt. \quad (2)$$

Näiden neliöintegroituvien signaalien avaruutta merkitään $L^2(\mathbb{R})$. “Energia” $E(s)$ on usein (muttei aina) läheistä sukua ilmiöön liittyvälle fysikaaliselle energialle. Lisäksi tyypillisesti vaadimme, että signaali on “riittävän mukava” — siis kulloisenkin tarpeen mukaan niin hyväkäyttöksinen, että laskutoimituksemme kestävät kriittisen tarkastelun... ;)

Moniulotteiset signaalit? Sovelluksissa järkevä paikka-avaruus olisi usein \mathbb{R}^d (erityisesti tapauksen $d = 2$ ja $d = 3$) ja silloin tarkasteltaisiin vastaavia signaaleja $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Näiden moniulotteisten signaalien analyysi on kuitenkin vain helppo laajennus tapauksesta $d = 1$.

Tulkintoja signaalille — miten signaali s voitaisiin mieltää?

Akustiikka: s äänisignaali, siis $s(t) \in \mathbb{R}$ olisi ilmanpaine hetkellä $t \in \mathbb{R}$.

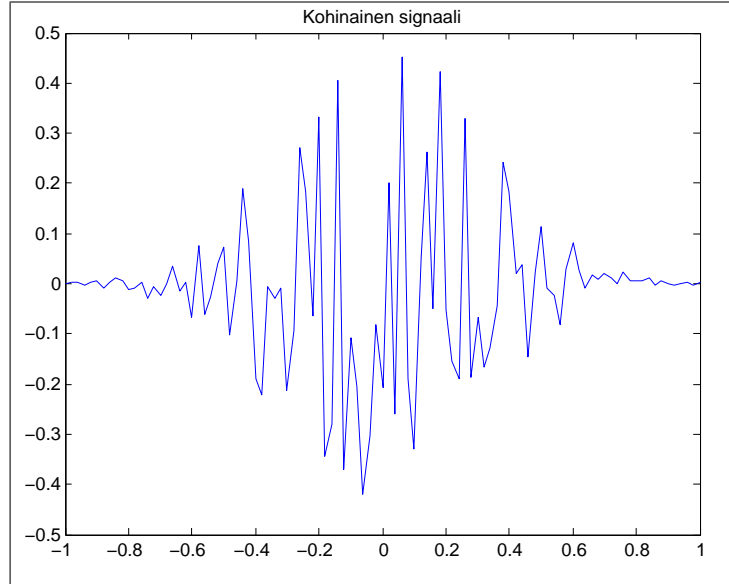
Meteorologia: Paitsi ilmanpaine, myös lämpötila ajan funktiona.

Kuvankäsittely: s valovoima ajan tai paikan funktiona.

Klassinen mekaniikka: $s(t) \in \mathbb{R}$ kappaleen paikkakoordinaatti hetkellä $t \in \mathbb{R}$.

Lämmönjohtuminen: $s(t) \in \mathbb{R}$ lämpötila paikassa $t \in \mathbb{R}$.

Kvanttimekaniikka: s alkeishiukkasen aaltofunktio paikan funktiona.



Normi ja sisätulo: Signaalin $s \in L^2(\mathbb{R})$ normi on

$$\|s\| := \sqrt{E(s)} = \left(\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Signaalien $r, s \in L^2(\mathbb{R})$ pistetulo eli sisätulo on

$$\langle r, s \rangle := \int_{\mathbb{R}} r(t) \overline{s(t)} dt. \quad (4)$$

Kun $a \in \mathbb{R}$, niin

$$0 \leq \|r + e^{ia} s\|^2 = \|r\|^2 + \|s\|^2 + 2\operatorname{Re}(e^{-ia} \langle r, s \rangle),$$

mistä saadaan ns. *Cauchy-Schwarz -epäyhtälö*

$$|\langle r, s \rangle| \leq \|r\| \|s\|. \quad (5)$$

Voidaan ajatella, että signaalien $r, s \in L^2(\mathbb{R})$ “välinen kulma” on $\alpha \in \mathbb{R}$ tai $\pi - \alpha$, kun

$$\langle r, s \rangle = \|r\| \|s\| \cos(\alpha);$$

erityisesti r, s ovat “toisiaan vastaan kohtisuorassa”, jos $\langle r, s \rangle = 0$.

Tehtävä. Tarkista Cauchy–Schwarz -epäyhtälön todistuksen välivaiheet, ja todista sen avulla ns. Minkowskin *kolmioepäyhtälö*

$$\|r + s\| \leq \|r\| + \|s\| \quad (6)$$

signaaleille $r, s \in L^2(\mathbb{R})$.

Signaalien vektoriavuus: kun $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ja $c \in \mathbb{C}$, määritellään funktiot $cs, r + s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ luonnollisesti kaavoilla

$$\begin{aligned} (cs)(t) &:= c s(t), \\ (r + s)(t) &:= r(t) + s(t) \end{aligned}$$

jokaisella $t \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että $cs, r + s \in L^2(\mathbb{R})$, jos $r + s \in L^2(\mathbb{R})$. Toisin sanoen signaalien avaruutta $L^2(\mathbb{R})$ voidaan pitää vektoriavuutena. Tässä vektoriavuudessa voidaan ajatella signaalien $r, s \in L^2(\mathbb{R})$ väliseksi etäisyydeksi lukua

$$\|r - s\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |r(t) - s(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Samaistetaan signaalit r ja s , jos $\|r - s\| = 0$ eli kun $r(t) = s(t)$ “melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ”, ja merkitään silloin yksinkertaisesti $r = s$ (tämä “melkein kaikilla” -käsite esitellään täsmällisesti kurssilla **MS-C1280 Mitta ja integraali**. Esimerkiksi jos $s(t) \neq 0$ vain äärellisen monella hetkellä $t \in \mathbb{R}$, voidaan sanoa, että $s = 0$ käytännössä (eli $s(t) = 0$ melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$).

Tehtävä. Tarkastellaan (t, y) -tasossa ns. *topologin sinikäyrää* $y = s(t)$, missä

$$s(t) = \begin{cases} \sin(t^{-1}), & \text{jos } t > 0, \\ 0, & \text{jos } t \leq 0. \end{cases}$$

- Hahmottele “topologin sinikäyrän” kuvaa.
- Näytä, että $\|r\| < \infty$, kun $r(t) := s(t)/(t + 1)$ (missä $r(-1) = 0$).
- Yleensä ei ole mielekästä puhua signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ “hetkellisellisestä taaajuudesta”. Miksi topologin sinikäyrän tapauksessa “taaajuus hetkellä $t > 0$ ” voisi kuitenkin olla $\frac{1}{2\pi}t^{-2}$? (Vihje: Mieti yleisempää tapausta $s(t) = \sin(2\pi\psi(t))$. Silloin aikavälillä $[t, t + h]$ on signaalissa s värähdyksiä noin $\psi(t + h) - \psi(t)$ kappaletta, ja $\psi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \dots$)

Signaalin mittauksen ongelmia: Arkielämässä emme voi käsitellä tarkasti signaalia $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Tähän on useita käytännöllisiä syitä. Voimme havainnoida vain lyhyitä menneisyyden aikavälejä, ja toki \mathbb{R} on tiukasti tulkituna epäfysikaalinen malli ajalle tai paikalle. Myös taustakohina rajoittaa signaalin havaitsemisen tarkkuutta — meidän on kehitettävä keinoja poistaa hälyä signaalista. On joka tapauksessa epärealistista kuvitella, että voisimme mitata signaalin s täsmällisen arvon $s(t) \in \mathbb{R}$ täsmällisellä hetkellä $t \in \mathbb{R}$. Vähän

realistisempaa olisi ajatella, että kenties voisimme mitata jonkinlaisia painotettuja hetkellisiä keskiarvoja signaalista, esimerkiksi tarkan arvon $s(t)$ sijasta “keskiarvon”

$$A_\sigma s(t) := \int_{\mathbb{R}} s(u) \varphi_{0,\sigma}(u-t) du,$$

missä $\varphi_{0,\sigma}$ on 0-keskiarvoisen σ -keskihajontaisen normaalijakauman tiheysfunktio. Tässä parametri $\sigma > 0$ olisi suuruusluokaltaan mittaustapahtuman ajanhetken epätarkkuus, ja jatkuvalle signaalille pätsi

$$s(t) = \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} A_\sigma s(t)$$

(sivumennen sanoen, käytämme tätä mittauksen $A_\sigma s$ ideaa todistaessamme Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksen kaavaa...). Ja tosielämässä ehdimme mittaamaan vain äärellisen monta arvoa! Vaikka siis jostakin kumman syystä pääsisimme käsiksi signaalin s tarkkoihin arvoihin, ehdimme saada niistä selville vain $n \in \mathbb{Z}^+$ kappaletta näytteitä

$$s(t_1), s(t_2), s(t_3), \dots, s(t_n).$$

Tämä johtaa diskreetin Fourier-analyysin ja tietokonelaskennan pariin, mutta sitä ennen meidän on syytä ymmärtää signaalien $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tapauksen pääpiirteet.

4.1.2 Fourier-muunnos ($s \mapsto \hat{s}$) : $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

Funktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos on funktio $\hat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, missä

$$\hat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt, \quad (7)$$

mikäli s on *Fourier-muuntuva* eli tämä integraali on “teoriassa laskettavissa” (eli s on “riittävän mukava”). Tässä muuttuja $t \in \mathbb{R}$ voi olla esimerkiksi *aika* tai *paikka* (yksikkö vaikkapa *sekunti* tai *metri*), ja muuttuja $\nu \in \mathbb{R}$ voisi olla ilmiöön liittyvän värähtelyn *taajuus* (yksikkö vaikkapa *hertsi*).

Voidaan merkitä selvyuden vuoksi myös

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}} s = \hat{s},$$

kun halutaan korostaa, että funktion s määrittelyjoukko on \mathbb{R} .

Milloin signaali on Fourier-muuntuva? Hieman liioitellen voidaan sanoa, että “kaikki käytännön elämän signaalit ovat Fourier-muuntuvia” — meidän on vain tulkittava kaavan (7) integraali sopivasti! Differentiaali- ja integraalilaskennan perusopinnoista tiedetään esimerkiksi *Analyysin peruslause* seurauksineen: jos funktio $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva ja äärellisestoinen (eli $s(t) = 0$, kun $|t|$ on “riittävän suuri”), niin se on integroitava — tässä onkin jo kiva suuri luokka Fourier-muuntuvia signaaleja! Tiedämme myös, etteivät jatkuvuus ja

äärellisyyskestoisuus ole välttämättömiä integroituvuudelle. Fourier-muunnos onnistuu myös sellaiselle integroituvalla funktiolla s , joka on lisäksi *itseisesti integroituva* eli jolle

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < \infty.$$

Kun integraali tulkitaan sopivasti, voidaan Fourier-muuntaa myös signaaleja $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, jotka eivät välttämättä integroidu itseisesti: tällä kurssilla meille keskeisin on *äärellisen energian* tapaus

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty,$$

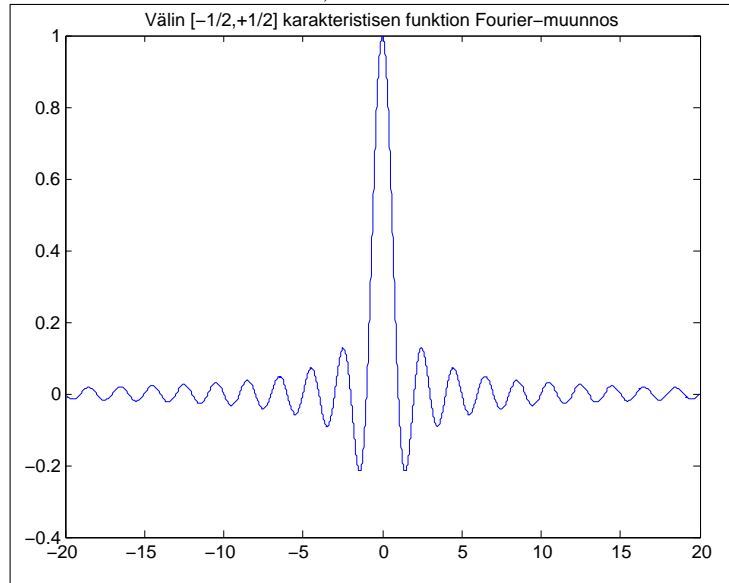
mutta on hyvä tietää, että hurjemminkin käyttäytyviä signaaleja voi Fourier-muuntaa (tällaisista tärkeä esimerkki on ns. *temperoitujen distribuutioiden* luokka, joka ei kuulu tämän kurssin vaatimuksiin).

Tehtävä. Laske funktion s Fourier-muunnos $\hat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, missä s on joukon $[-1/2, +1/2] \subset \mathbb{R}$ karakteristinen funktio eli

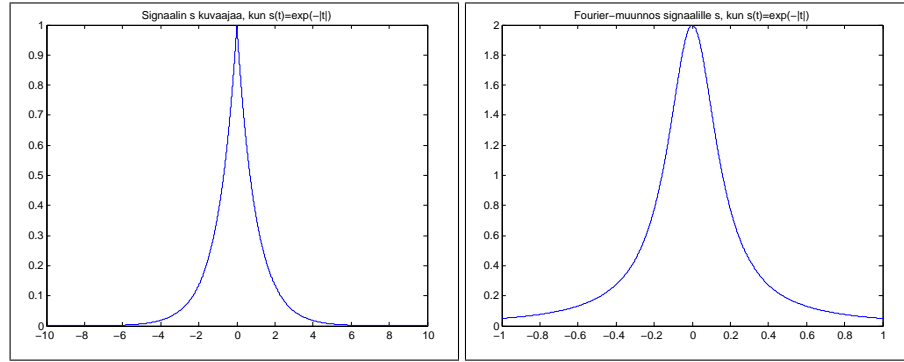
$$s(t) := \mathbf{1}_{[-1/2, +1/2]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [-1/2, +1/2], \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

(Lopputulos: $\hat{s}(\nu) = \text{sinc}(\nu) := \sin(\pi\nu)/(\pi\nu)$, kun $\nu \neq 0$. Entä $\hat{s}(0)$?)

Haastava jatkotehtävä: laske sitten vielä funktion $\hat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos. (Huom! Tämä jatkotehtävä muuttuu melkoisen helpoksi, kun olemme käsitelleet Fourier-käänteismuunnoksen...)



Tehtävä. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos, kun $s(t) = e^{-|t|}$.
 Sievennä vastauksesi reaalisiksi!
 (Lopputulos: $\widehat{s}(\nu) = 2/(1 + (2\pi\nu)^2)$, missä $\nu \in \mathbb{R}$.)



Tehtävä. Oletetaan, että analoginen signaali s on reaaliarvoinen. Miten tämä näkyy Fourier-muunnoksessa $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$? Entä jos myös \widehat{s} on reaaliarvoinen — mitä voidaan silloin sanoa alkuperäisestä signaalista s ?

Tehtävä. Olkoon $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, joka on derivoituva kohdassa $t = 0$ ja jolle $\psi(0) = 1$ ja $\psi(t + u) = \psi(t)\psi(u)$ jokaisella $t, u \in \mathbb{R}$. Näytä, että kaikilla $t \in \mathbb{R}$ pätee

$$\psi(t) = e^{\psi'(0)t}.$$

(Erityisesti: jos $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on sileä, $\psi(0) = 1$ ja $|\psi(t)| = 1$ jokaisella $t \in \mathbb{R}$, niin $\psi(t) = e^{i2\pi t \cdot \nu}$ eräällä $\nu \in \mathbb{R}$.)

Fourier-muunnoksen lineaarisuus: Kun $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ovat Fourier-muuntuvia ja $c \in \mathbb{C}$ vakio, niin

$$\widehat{cs}(\nu) = c\widehat{s}(\nu), \quad (8)$$

$$\widehat{r+s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) + \widehat{s}(\nu), \quad (9)$$

missä $(cs)(t) := cs(t)$ ja $(r+s)(t) := r(t) + s(t)$. Tarkista tämä Fourier-muunnoksen lineaarisuus suoralla laskulla!

Derivaatta–polynomi -dualiteetti: Fourier-muunnos muuntaa derivoinnin polynomilla kertomiseksi ja polynomilla kertomisen derivoinniksi, sillä jos $r(t) = ts(t)$ ja $\widehat{r} = \widehat{ts}$, niin

$$\widehat{s}'(\nu) = -i2\pi \widehat{ts}(\nu), \quad (10)$$

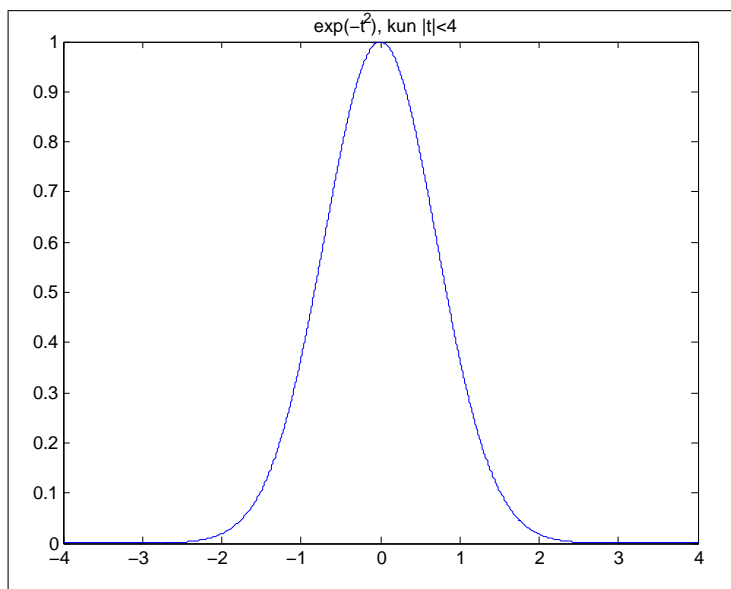
$$\widehat{s'}(\nu) = +i2\pi\nu \widehat{s}(\nu). \quad (11)$$

Todetaan nämä suorilla laskuilla (suppenemisistä sekä derivoimisen ja integroimisen järjestyksestä välittämättä): ensiksi

$$\begin{aligned}\widehat{s}'(\nu) &= \frac{d}{d\nu} \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \nu} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t) \frac{d}{d\nu} e^{-i2\pi t \nu} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \nu} (-i2\pi t) dt \\ &= -i2\pi \widehat{r}(\nu),\end{aligned}$$

toiseksi saadaan osittaisintegroimalla (olettaen, että $s(t) \rightarrow 0$, kun $|t| \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}\widehat{s'}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} s'(t) e^{-i2\pi t \nu} dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} s(t) \frac{d}{dt} e^{-i2\pi t \nu} dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \nu} (-i2\pi \nu) dt \\ &= +i2\pi \nu \widehat{s}(\nu).\end{aligned}$$



Esim. Kun normaali jakauman keskiarvo on $\mu \in \mathbb{R}$ ja keskihajonta $\sigma > 0$, sen tiheysfunktio $\varphi_{\mu, \sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa

$$\varphi_{\mu, \sigma}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Olkoon nyt $s(t) := \varphi_{0,\sigma}(t)$ eli

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t/\sigma)^2/2}.$$

Tämän Fourier-muunnoksesta meillä on paljon iloa jatkossa! Aluksi tärkeä havainto ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden maailmasta: vakioilla $a, b \in \mathbb{R}$ alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} g'(t) = -at g(t), \\ g(0) = b \end{cases}$$

ainoa ratkaisu on

$$g(t) = b e^{-at^2/2}$$

— kertaa tämä differentiaaliyhtälöiden ominaisuus, jos ei tunnu tutulta! Tässä laskussa

$$s'(t) = \frac{-t}{\sigma^2} s(t),$$

mikä on Fourier-muunnettuna

$$i2\pi\nu \widehat{s}(\nu) = \frac{1}{i2\pi\sigma^2} \widehat{s}'(\nu)$$

derivaatta–polynomi -dualiteetin nojalla! Saatiin differentiaaliyhtälö

$$\widehat{s}'(\nu) = -(2\pi\sigma)^2 \nu \widehat{s}(\nu),$$

jonka ratkaisu siis on

$$\widehat{s}(\nu) = \widehat{s}(0) e^{-2(\pi\sigma\nu)^2}.$$

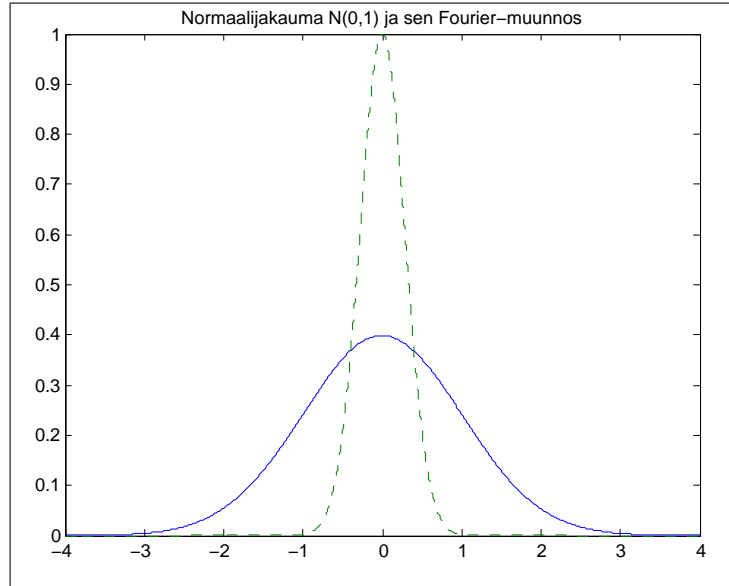
Tässä

$$\begin{aligned} \widehat{s}(0) &= \int_{\mathbb{R}} s(t) dt \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s(t) s(u) dt du \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(t^2+u^2)/(2\sigma^2)} dt du \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} r d\theta dr \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_0^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr \right]^{1/2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

missä siirryttiin tason napakoordinaatteihin (r, θ) , jolle pätee $(t, u) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Näin on saatu laskettua

$$\widehat{\varphi_{0,\sigma}}(\nu) = e^{-2(\pi\sigma\nu)^2}. \quad (12)$$

Huomaa, että yllä $\int_{\mathbb{R}} s(t) dt = 1$, koska s on todennäköisyysjakauma (tulipahan kuitenkin laskettua tämä seikkaperäisesti!).



Tehtävä. Tarkista, että edellisen esimerkin seuraava mielenkiintoinen erikoistapaus on voimassa: kun $\sigma = 1/\sqrt{2\pi}$ ja $s = \varphi_{0,\sigma}$ eli kun

$$s(t) = e^{-\pi t^2},$$

niin silloin

$$\widehat{s}(\nu) = e^{-\pi \nu^2}.$$

Toisin sanoen tässä tapauksessa $\widehat{s} = s$ pätee!

Tehtävä (Fourier-muunnoksen symmetrioita). Olkoot $q, r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sellaisia, että

$$q(t) = s(t - a) \quad \text{ja} \quad r(t) = s(bt),$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ vakioita ja $b \neq 0$. Tarkista laskemalla, että

$$\widehat{q}(\nu) = e^{-i2\pi a \cdot \nu} \widehat{s}(\nu), \tag{13}$$

$$\widehat{r}(\nu) = \frac{1}{b} \widehat{s}(\nu/b). \tag{14}$$

Samoin tarkista kaava

$$\widehat{k}(\nu) = \widehat{s}(\nu - \alpha), \tag{15}$$

missä $k(t) = e^{+i2\pi t \cdot \alpha} s(t)$.

Tehtävä. Laske normaalijakauman tiheysfunktion $s = \varphi_{\mu,\sigma}$ Fourier-muunnos, missä

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-((t-\mu)/\sigma)^2/2}.$$

(Huomaa, että voit käyttää edellisen laskuesimerkin lopputulosta ja nyt jo tuttuja Fourier-muunnoksen ominaisuuksia.)

Tehtävä. Laske Fourier-muunnos joukon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ karakteristiselle funktiolle $s = \mathbf{1}_{[a,b]}$, missä

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [a, b], \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Näytä, että $|\widehat{s}(\nu)|$ on rajoitettu ja että $|\widehat{s}(\nu)| \leq c|\nu|^{-1}$, missä $c > 0$ on vakio. (Itse asiassa $|\widehat{s}(\nu)|$ on mahdollista kirjoittaa lyhyenä selkeänä kaavana...)

Tehtävä. Kun $n \geq 0$ on kokonaisluku, määritellään *Hermiteen funktiot* $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että

$$h_n(t) = e^{\pi t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2\pi t^2}.$$

Todista, että $\widehat{h}_n = (-i)^n h_n$.

Fourier-muunnoksen käänteismuunnos? Voidaanko alkuperäinen funktio s löytää, jos tunnetaan vain sen Fourier-muunnos \widehat{s} ? Kyllä — ainakin tietyin ehdoin, jotka selviävät seuraavassa laskussa! Merkitään

$$\varphi_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t/\sigma)^2/2},$$

jolle tiedetään aiemmasta, että

$$\widehat{\varphi}_\sigma(\nu) = \exp(-2(\pi\sigma\nu)^2)$$

ja että $\widehat{\widehat{\varphi}_\sigma} = \varphi_\sigma$. Tämän avulla saadaan

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} s(u) \varphi_\sigma(u-t) \, du \\ &= \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} s(u) \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi(u-t)\cdot\nu} e^{-2(\sigma\nu/\pi)^2} \, d\nu \, du \\ &= \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\sigma\nu/\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} s(u) e^{-i2\pi(u-t)\cdot\nu} \, du \, d\nu \\ &= \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\sigma\nu/\pi)^2} \widehat{s}(\nu) e^{+i2\pi t\cdot\nu} \, d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\nu) e^{+i2\pi t\cdot\nu} \, d\nu. \end{aligned}$$

Saatiin siis Fourier-muunnoksen käänteismuunnokselle kaava

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\nu) e^{+i2\pi t \cdot \nu} d\nu, \quad (16)$$

toisin sanoen $s(t) = \widehat{\widehat{s}}(-t)$. Tämä kaava on voimassa, jos yllä tehdyt laskutoimitukset olivat sallittuja: vaihdoimme σ -raja-arvon sekä ν - ja u -integrointien järjestyksiä, ja yleensäkin integraalien suppeneminen ei ollut itsestäänselvää. Kurssilla **MS-E1421 Harmonic analysis** perehdytään näihin kysymyksiin tarkemmin, mutta voidaan todeta, että tämä käänteismuunnoksen johtaminen on järkevä esimerkiksi kun

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < \infty \text{ ja}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{s}(\nu)| d\nu < \infty,$$

jolloin signaalit $s, \widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ovat automaattisesti myös jatkuvia.

Tehtävä. Tarkastellaan funktiota $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, jolle $s'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva. Näytä, että jos $\int |s(t)| dt < \infty$ ja $\int |s''(t)| dt < \infty$, niin edellä johdettu Fourier-käänteismuunnoksen kaava on voimassa.

Haastava tehtävä: Schwartz-testifunktioiden avaruus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ koostuu niistä funktioista $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, joille

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^j s^{(k)}(t)| < \infty$$

jokaisella $j, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Osoita, että Fourier-muunnoksen antama kuvaus $(s \mapsto \widehat{s}) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on bijektio. (Esimerkiksi normaalijakauma kuuluu avaruuteen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, samoin kaikki sellaiset äärettömän sileät s , joille $s(t) = 0$ suurilla $|t|$.)

Seuraavaksi tärkeä tiedote: Energia säilyy Fourier-muunnoksessa! Tämä liittyy unitaarisuuteen...

Fourier-muunnos on unitaarinen: toisin sanoen se säilyttää signaalien normit ja niiden väliset kulmat! Tämä tarkoittaa täsmällisesti sitä, että sisätulot säilyvät eli

$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = \langle r, s \rangle \quad (17)$$

— tätä kutsutaan myös Parseval-yhtälöksi (tai Parseval–Rayleigh–Plancherel-yhtälöksi tms.). Tästä toki seuraa välittömästi *isometrisyys* eli normin (ja siten energian) säilyminen:

$$\|\widehat{s}\| = \|s\|. \quad (18)$$

Tarkistetaan Fourier-muunnoksen unitaarisuus käyttämällä Fourier-käänteismuunnosta:

$$\begin{aligned}
 \langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{r}(\nu) \overline{\widehat{s}(\nu)} \, d\nu \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{r}(\nu) \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) \, dt} \, d\nu \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{r}(\nu) \, d\nu \overline{s(t)} \, dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} r(t) \overline{s(t)} \, dt = \langle r, s \rangle.
 \end{aligned}$$

Aikasiirrot ja taajuusmodulaatiot: Signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ siirto ajan $p \in \mathbb{R}$ verran on signaali $T_p s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, missä

$$T_p s(t) := s(t - p). \quad (19)$$

Signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ modulointi taajuuden $\alpha \in \mathbb{R}$ verran on signaali $M_\alpha s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, missä

$$M_\alpha s(t) := e^{+i2\pi t \cdot \alpha} s(t). \quad (20)$$

Fourier-muunnos kohtelee näitä kaavoja niin, että $\widehat{M_\alpha s} = T_\alpha \widehat{s}$ ja $\widehat{T_p s} = M_{-p} \widehat{s}$, toisin sanoen

$$\begin{aligned}
 \widehat{M_\alpha s}(\nu) &= T_\alpha \widehat{s}(\nu), \\
 \widehat{T_p s}(\nu) &= M_{-p} \widehat{s}(\nu).
 \end{aligned}$$

Voidaan ajatella, että “aikapuolen modulaatio Fourier-muuttuu taajuuspuolen siirroksi”.

Integraalioperaattorit: havaitusta sisääntulevasta signaalista $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ muokkaamme ulostulevan signaalin $Ls = L(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Muunnos L on *lineaarinen*, jos

$$\begin{aligned}
 L(r + s) &= L(r) + L(s) \quad \text{ja} \\
 L(\lambda s) &= \lambda L(s)
 \end{aligned}$$

kaikille signaaleille $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ja vakioille $\lambda \in \mathbb{C}$. Lineaarinen muunnos L voidaan esittää integraalioperaattorina:

$$Ls(t) = \int_{\mathbb{R}} K_L(t, u) s(u) \, du, \quad (21)$$

missä K_L on muunnoksen ns. *ydin*. Tässä ydin K_L toki määrää integraalioperaattorin L , mutta myös käänteinen pätee: L määrää ytimen K_L “yksikäsitteisesti distribuutioiden mielessä” (hyvin väljin ehdoin).

Aikainvariantit operaattorit: Olkoon integraalioperaattori L ajan siirrois-
sa säilyvä eli *aikainvariantti*. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$T_p L = L T_p \quad (22)$$

kaikilla $p \in \mathbb{R}$ eli

$$T_p L s(t) = L T_p s(t)$$

kaikille signaaleille $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ja kaikille ajoille $t, p \in \mathbb{R}$. Silloin $L = T_{-p} L T_p$,
mistä saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} K_L(t, u) s(u) du &= L s(t) = T_{-p} L T_p s(t) = L T_p s(t+p) \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_L(t+p, u) T_p s(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_L(t+p, u) s(u-p) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_L(t+p, u+p) s(u) du. \end{aligned}$$

Siten $K_L(t, u) = K_L(t+p, u+p)$ kaikilla $p, t, u \in \mathbb{R}$, erityisesti $K_L(t, u) = K_L(t-u, 0) = r(t-u)$ jollekin signaalille $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Konvoluutio: Signaalien $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *konvoluutio* on signaali $r * s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,
jolle

$$r * s(t) := \int_{\mathbb{R}} r(t-u) s(u) du, \quad (23)$$

mikäli tämä integraali voidaan laskea. Edellä nähtiin, että aikainvariantti inte-
graalioperaattori L on väistämättä konvoluutiomuotoa: $L s(t) = r * s(t)$, missä
ydin $K_L(t, u) = r(t-u)$.

Konvoluutio Fourier-muuntuu tuloksi ja päinvastoin! Näytä laskemal-
la, että

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu), \quad (24)$$

$$\widehat{r s}(\nu) = \widehat{r} * \widehat{s}(\nu), \quad (25)$$

missä $(r s)(t) := r(t) s(t)$. Tämä on Fourier-analyysin eräs tärkeimpiä ominai-
suuksia: “konvoluutio ajassa” on “kertolasku taajuudessa”.

Tehtävä. Sanotaan, että signaali $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on *rajoitettu*, jos $|r(t)| \leq M$
kaikilla t , missä $M < \infty$ on vakio. Näytä, että silloin

$$|r * s(t)| \leq M \int_{\mathbb{R}} |s(u)| du.$$

Tehtävä. Laske $s * s$ ja $\widehat{s * s}$, kun

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } |t| \leq 1/2, \\ 0, & \text{jos } |t| > 1/2. \end{cases}$$

Tehtävä. Olkoon $\psi_\sigma(t) := 2\sigma/(\sigma^2 + (2\pi t)^2)$, kun $\sigma > 0$. Näytä, että $\psi_\rho * \psi_\sigma = \psi_{\rho+\sigma}$. (Vihje: laske $\widehat{s}(\nu)$, missä $s(t) = e^{-a|t|}$, kun $a > 0$.)

Esimerkki. Kun $s := \mathbf{1}_{[-1,+1]}$ ja $r_\sigma := \varphi_{0,\sigma}$ eli

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [-1, +1], \\ 0 & \text{muutoin,} \end{cases} \quad r_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t/\sigma)^2/2},$$

niin

$$\widehat{s}(\nu) = \begin{cases} 2, & \text{kun } \nu = 0, \\ \frac{\sin(2\pi\nu)}{\pi\nu} & \text{muutoin,} \end{cases} \quad \widehat{r}_\sigma(\nu) = e^{-2(\pi\sigma\nu)^2},$$

joten lukija voi helposti näyttää, että tässä

$$\lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \|s - s * r_\sigma\| = 0.$$

Tämä sinänsä vaatimattoman oloinen tulos on tärkeä, sillä se yleistyy helposti koskemaan mitä tahansa signaalia $s \in L^2(\mathbb{R})$.

Signaalin mittaamisesta: Mikään fyysikaalinen mittalaite ei kykene mittaamaan signaalin arvoa täsmällisesti annetulla tarkalla ajanhetkellä. Usein kohtuullisen realistinen oletus on, että tarkkojen signaalin s arvojen $s(t)$ sijasta mitataan arvoja $r * s(t)$, missä “mittaria mallintavalle” funktiolle $r : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ pätee ainakin

$$r(t) \geq 0, \tag{26}$$

$$\int_{\mathbb{R}} r(t) dt = 1. \tag{27}$$

Osaatko sanoa, miksi nämä ehdot ovat järkeviä? Esimerkkinä tällaisesta funktiosta r voisi olla edellisen esimerkin $r_\sigma = \varphi_{0,\sigma}$.

Tehtävä. Oletetaan, että $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ toteuttaa ehdot (26). Olkoon $r_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-1} r(t/\varepsilon)$. Näytä, että

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \|\chi_{[a,b]} - r_\varepsilon * \chi_{[a,b]}\| = 0.$$

Fourier-muunnoksen laajennus kaikille signaaleille: Nyt tarkkana! Edellä on jollakin tasolla havaittu, että Fourier-muunnos on bijektiivinen lineaarikuvaus

$$(s \mapsto \widehat{s}) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Schwartz-testifunktioiden avaruudella $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Voidaan kuitenkin osoittaa, että joukko $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$ siinä mielessä, että jokaisella signaalilla $s \in L^2(\mathbb{R})$ ja jokaisella tarkkuudella $\varepsilon > 0$ on olemassa $s_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ siten, että

$$\|s - s_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Kun vielä muistetaan Fourier-muunnoksen säilyttävän normin, antaa tämä meille mahdollisuuden ymmärtää kaavojen

$$\widehat{s}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \nu} dt, \quad (28)$$

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\nu) e^{+i2\pi t \nu} d\nu \quad (29)$$

olevan totta myös signaalille $s \in L^2(\mathbb{R})$, vaikka tiukasti tulkittuna näitä integraaleja ei voi enää ajatella usein edes Lebesgue-integraaleina, ja vaikka Lebesgue-tulkinta olisikin mahdollinen ne eivät enää ole totta välttämättä *jokaisella* $t, \nu \in \mathbb{R}$; kuitenkin nämä integraalit voidaan tulkita *distribuutioiden mielessä*, katso kurssi **MS-E1421 Harmonic analysis**. Joka tapauksessa nyt voimme todeta, että Fourier-muunnos on laajennettu kaikkia signaaleja koskevaksi bijektiiviseksi normin säilyttäväksi lineaarikuvaukseksi

$$(s \mapsto \widehat{s}) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}). \quad (30)$$

Huomautus: Edellä mainittu approksimaatio s_ε voidaan laskea esimerkiksi sopivana konvoluutiona

$$s_\varepsilon := s * \varphi_{0,\sigma},$$

missä $\varphi_{0,\sigma}$ on 0-keskiarvoisen normaalijakauman tiheysfunktio keskihajonnalla $\sigma > 0$. Annetulla $\varepsilon > 0$ valitsemme ”riittävän pienen” $\sigma > 0$.

Huomautus: Kvanttimekaniikassa hiukkasen aaltofunktio $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ noudattaa ns. Schrödingerin yhtälöä. Aaltofunktio tulkitaan niin, että hiukkanen on alueessa $A \subset \mathbb{R}^3$ todennäköisyydellä

$$\int_A |s(x)|^2 dx.$$

Osoittautuu, että on fyysisesti mahdotonta mitata mielivaltaisen tarkasti yhtä aikaa hiukkasen paikkaa ja liikemäärää — tätä ilmiötä kuvailee Heisenbergin epätarkkuusperiaate.

Tehtävä. Fourier-analyysin *Heisenbergin epätarkkuusperiaate* on epäyhtälö

$$\|s\|^2 \leq 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |s(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \nu^2 |\widehat{s}(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2}. \quad (31)$$

Todista Heisenbergin epätarkkuusperiaate seuraavasti: Näytä ensin osittaisintegroimalla, että

$$\|s\|^2 = - \int_{\mathbb{R}} t \left(s(t) \overline{s'(t)} + \overline{s(t)} s'(t) \right) dt$$

“riittävän mukaville” signaaleille $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, joten

$$\|s\|^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |t s(t)| |s'(t)| dt.$$

Sovella Cauchy–Schwarz -epäyhtälöä tähän integraaliin niin, että saat Heisenbergin epäyhtälön (muista, että energia säilyy Fourier-muunnoksessa).

Huom! On helppo todistaa yleisempi Heisenbergin epäyhtälö

$$\|s\|^2 \leq 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 |s(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\nu - \nu_0)^2 |\widehat{s}(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \quad (32)$$

jokaisella $t_0, \nu_0 \in \mathbb{R}$. Miten Heisenbergin epäyhtälö voidaan tulkita? Jos $\|s\| = 1 = \|\widehat{s}\|$, voidaan ajatella, että $|s|^2$ ja $|\widehat{s}|^2$ ovat todennäköisyysjakaumia, joiden odotusarvot ovat

$$\mu_s = \int_{\mathbb{R}} t |s(t)|^2 dt \quad \text{ja} \quad \mu_{\widehat{s}} = \int_{\mathbb{R}} \nu |\widehat{s}(\nu)|^2 d\nu$$

ja vastaavat varianssit

$$\sigma_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_s)^2 |s(t)|^2 dt \quad \text{ja} \quad \sigma_{\widehat{s}}^2 = \int_{\mathbb{R}} (\nu - \mu_{\widehat{s}})^2 |\widehat{s}(\nu)|^2 d\nu.$$

Silloin Heisenbergin epäyhtälö on

$$\frac{1}{4\pi} \leq \sigma_s \sigma_{\widehat{s}} \quad (33)$$

eli tässä mielessä signaali ja sen Fourier-muunnos eivät voi olla lokalisoituneita mielivaltaisen tarkasti yhtä aikaa sekä ajassa että taajuudessa! Itse asiassa näissä epäyhtälöissä esiintyvä vakio 4π on paras mahdollinen: sen voi nähdä tarkastelemalla signaalina s Gaussin normaalijakaumaa.

4.1.3 Silotus konvoluution avulla

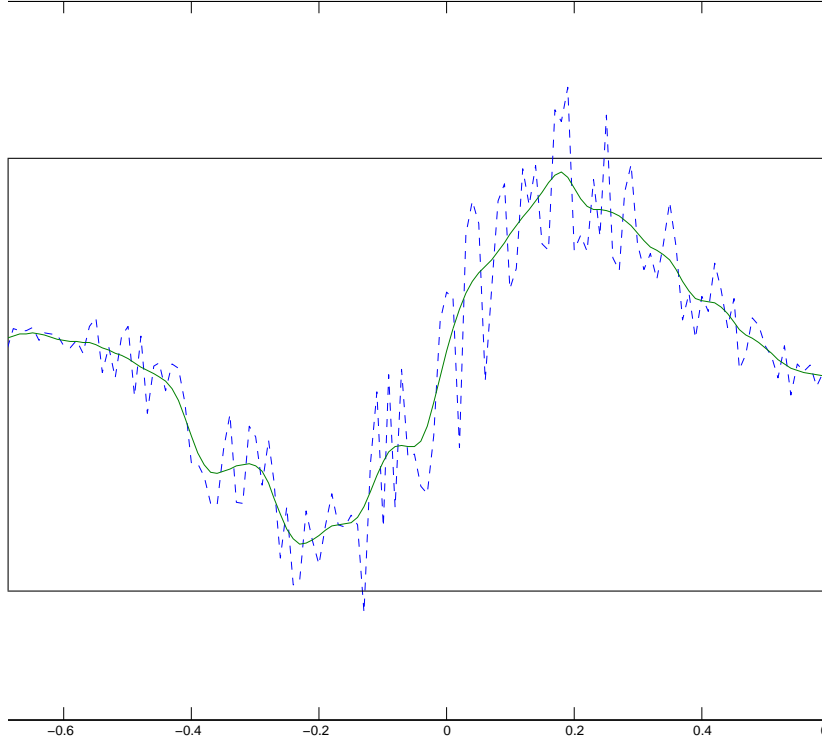
Oletetaan, että signaali $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on sileä (eli sitä voidaan derivoida mahdollisesti montakin kertaa). Osoittautuu, että myös $r * s = s * r$ on silloin sileä:

$$(r * s)' = r' * s, \quad (34)$$

koska

$$(r * s)'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} r(t-u) s(u) du = \int_{\mathbb{R}} r'(t-u) s(u) du = r' * s(t).$$

Kohinainen signaali s (katkoviiva) ja sen konvoluutiosilotus $r*s$ (yhtenäinen viiva)



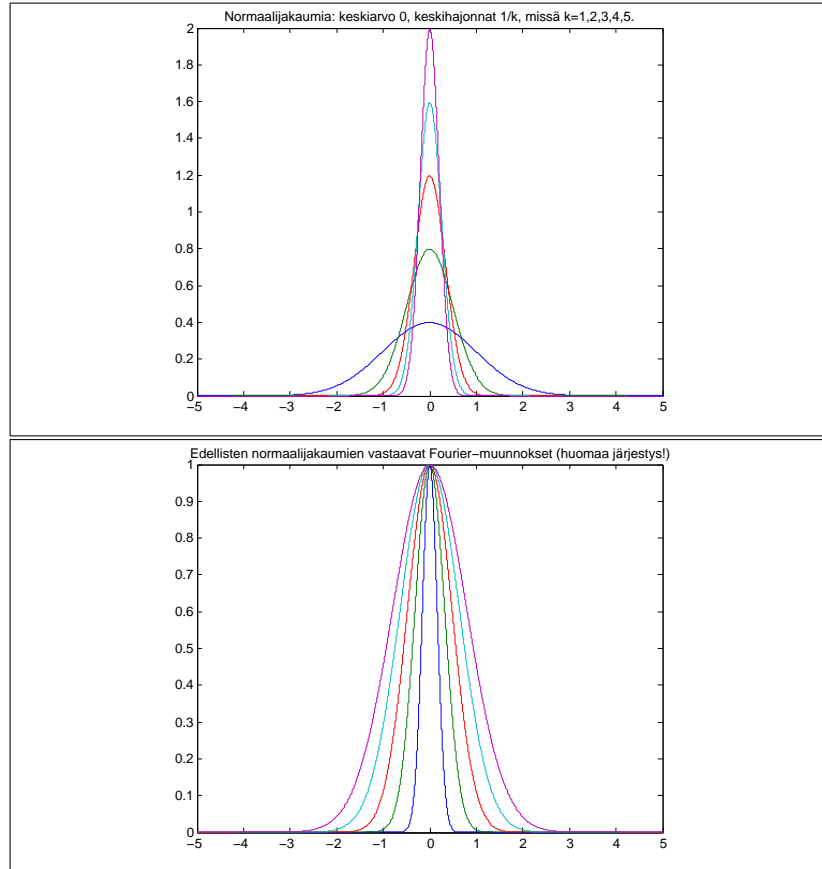
Mihin tätä havaintoa voi käyttää? Yritetään vaikkapa sisääntulevasta signaalista s suodattaa ulostuleva signaali $r * s$ sopivalla konvoluutioytimellä r . Jos esimerkiksi halutaan säilyttää matalat taajuuudet, mutta poistaa korkeataajuisen taustahäly, niin voidaan valita sellainen r , jolle

$$\begin{aligned} \widehat{r}(\nu) &\approx 1, & \text{kun } |\nu| &\approx 0, \\ \widehat{r}(\nu) &\rightarrow 0 & \text{nopeasti, kun } |\nu| &\rightarrow \infty, \\ r(t) &\rightarrow 0 & \text{nopeasti, kun } |t| &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Muista, että $\widehat{r^{(k)}}(\nu) = (i2\pi\nu)^k \widehat{r}(\nu)$: siis pätee sileälle r $\widehat{r}(\nu) \rightarrow 0$ nopeasti, kun $|\nu| \rightarrow \infty$. Esimerkki: olkoon $r(t) = \varphi_\sigma(t)$ Gaussin normaalijakauma, missä

$$\varphi_\sigma(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t/\sigma)^2/2} \implies \widehat{\varphi}_\sigma(\nu) = e^{-2(\pi\sigma\nu)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{\varphi_\sigma * s}(t) &= \widehat{\varphi_\sigma}(\nu) \widehat{s}(\nu) \\ &= e^{-2(\pi\sigma\nu)^2} \widehat{s}(\nu) \\ &\xrightarrow{0 < \sigma \rightarrow 0} \widehat{s}(\nu). \end{aligned}$$



4.1.4 Dirac-delta

Dirac-delta -signaali δ_p hetkellä $p \in \mathbb{R}$ toteuttaa

$$\int_{\mathbb{R}} s(t) \delta_p(t) dt = s(p) \quad (35)$$

kaikilla jatkuvilla signaaleilla $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Tulkinta: Dirac-delta δ_p on äkillinen yksikköimpulssi hetkellä p ,

$$\delta_p = \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \varphi_{p,\sigma}.$$

Dirac-deltan Fourier-muunnos:

$$\widehat{\delta}_p(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \nu} \delta_p(t) dt = e^{-i2\pi p \nu}.$$

Huomaa, että energia

$$\|\delta_p\|^2 = \|\widehat{\delta}_p\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{-i2\pi p \cdot \nu}|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} 1 d\nu = \infty,$$

joten tässä mielessä Dirac-delta on epäfysikaalinen signaali. Dirac-delta δ_p ei ole missään nimessä tavallinen funktio! Voidaan ajatella, että $\delta_p(t) = 0$, kun $t \neq p$, mutta olisi epäilyttävää kirjoittaa $\delta_p(p) = \infty$.

Dirac-deltaa voi käyttää Fourier-integraalien sievennyksessä:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) du d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} d\nu \right] s(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta_0(t-u) s(u) du \\ &= \delta_0 * s(t) \\ &= s(t), \end{aligned}$$

pyörittiin siis ympäri $s(t) = \dots = s(t)$ — siis mikä oli idea? Laskelman ensimmäisessä yhtälössä oli työläästi todistamamme Fourier-käänteismuunnoksen tapaus, kun taas myöhemmin “fuskasimme” kirjoittamalla

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} d\nu = \delta_0(t-u).$$

Tällaisia “fuskauksia” on mukava käyttää oikopolkuina Fourier-integraalien sievennyksissä: näimme tässäkin, miten mukavasti integraalit laskun loppuvaiheessa katosivat! Yleisemmin $\delta_p * s = T_p s$:

$$\begin{aligned} \delta_p * s(t) &= \int_{\mathbb{R}} \delta_p(t-u) s(u) du \\ &= s(t-p) = T_p s(t). \end{aligned}$$

Toisin sanoen integraalioperaattorin T_p konvoluutioydin on δ_p eli vastaava ydin $K_{T_p}(t, u) = \delta_p(t-u)$.

Dirac-delta on esimerkki ns. distribuutiosta, tarkemmin sanottuna se on **temperoitu distribuutio**. Temperoitu distribuutio $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on jatkuva lineaarikuvaus $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, missä $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on Schwartz-testifunktioiden avaruus. Tässä siis $A(r+s) = A(r) + A(s)$ ja $A(\lambda s) = \lambda A(s)$ jokaisella $r, s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$, ja lisäksi $A(s_j) \rightarrow A(s)$, jos $s_j \rightarrow s$ avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (emme nyt tarkemmin esittele jatkuvuuden käsitettä tässä, mutta tämä on toki tärkeää harmonisen analyysin jatko-opinnoissa). On tapana merkitä

$$A(s) =: \int_{\mathbb{R}} A(t) s(t) dt \in \mathbb{C},$$

mikä onkin aivan järkevää, jos distribuutio A sattuu olemaan tavallinen testifunktio $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: tässä mielessä siis $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ja voidaan myös tulkita $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Kuitenkaan tätä muodollista integraalia ei voi tulkita kaikkien distribuutioiden tapauksessa perinteisen integraalin mielessä: erityisesti $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ei välttämättä ole funktio, eli sillä ei välttämättä ole piste-arvoja $A(t) \in \mathbb{C}$ perinteisessä mielessä! Tästä huolimatta distribuutioita voidaan derivoida muodollisen osittaisintegroinnin avulla:

$$A'(s) = \int_{\mathbb{R}} A'(t) s(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} A(t) s'(t) dt = -A(s').$$

Myös unitaarinen Fourier-muunnos $(A \mapsto \widehat{A}) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ onnistuu:

$$\widehat{A}(\widehat{s}) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}(\nu) \overline{\widehat{s}(\nu)} d\nu = \int_{\mathbb{R}} A(t) \overline{s(t)} dt = A(\overline{s}).$$

4.1.5 Fourier-integraali dimensiossa $d \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Olemme tähän mennessä käsitelleet 1-ulotteisten signaalien $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-analyysia. Osoittautuu kuitenkin, että d -dimensioisten signaalien tapaus on olennaisesti samankaltainen, joten tapaus $d = 1$ on erityisen hyvä ymmärtää! Signaalin $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ lasketaan

$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt, \quad (36)$$

missä $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ (yleistetty “aika”) ja $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d$ (yleistetty “taajuus”),

$$t \cdot \nu = \sum_{k=1}^d t_k \cdot \nu_k = t_1 \nu_1 + \dots + t_d \nu_d \in \mathbb{R}$$

(“ajan” ja “taajuuden” pistetulo),

$$\int_{\mathbb{R}^d} \dots dt = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \dots dt_1 \dots dt_d.$$

Energia määritellään

$$\|s\|^2 := \int_{\mathbb{R}^d} |s(t)|^2 dt,$$

ja esimerkiksi

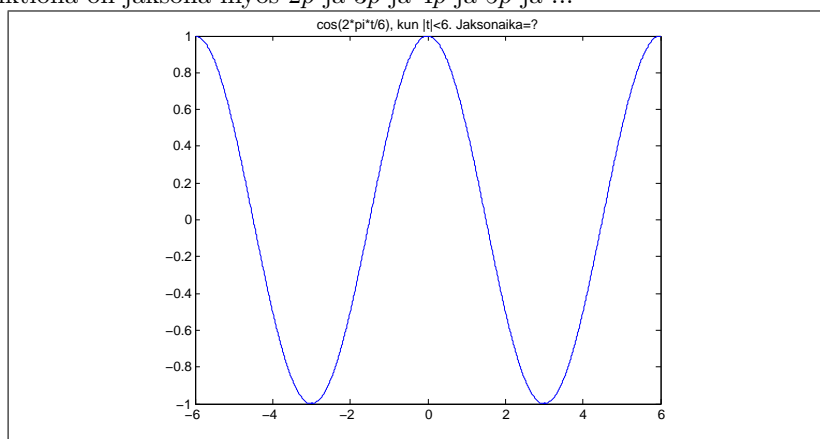
$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu) d\nu, \\ \|s\|^2 &= \|\widehat{s}\|^2, \\ r * s(t) &:= \int_{\mathbb{R}^d} r(t-u) s(u) du, \\ \widehat{r * s}(\nu) &= \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu). \end{aligned}$$

4.2 Fourier-kerroinmuunnos ja Fourier-sarja eli jaksollisten signaalien $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tapaus ($s : \mathbb{R}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$)

Olkoon signaali $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nyt p -jaksollinen eli p -periodinen, siis

$$s(t - p) = s(t)$$

jokaisella $t \in \mathbb{R}$. Esimerkiksi tutut trigonometriset funktiot $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovat 2π -jaksollisia, sillä $\cos(t - 2\pi) = \cos(t)$ ja $\sin(t - 2\pi) = \sin(t)$. p -jaksollisesta funktiosta s riittää tietää sen arvot millä tahansa p :n mittaisella välillä, esimerkiksi janalla $]-p/2, +p/2]$ tai janalla $[0, p[$. Huomaa, että jokaisella p -jaksollisella funktiolla on jaksona myös $2p$ ja $3p$ ja $4p$ ja $5p$ ja ...



Merkintöjä: Kun $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on p -jaksollinen eli $s(t - p) = s(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, merkitään $s : \mathbb{R}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Joukkoa $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kutsutaan nimellä “litteä torus”. (Miksi? Mieti...) Voidaan ajatella, että “aika-avaruus” $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on ympyrä: ajanhetki $t \in \mathbb{R}$ on sama kuin ajanhetki $t - k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Siten ajan $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kokonaislukuosalla ei ole väliä, vain desimaaliosalla on merkitystä!

Elämä helpommaksi! p -jaksollinen signaali $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ voidaan yksinkertaisella muuttujanvaihdoilla muokata 1-jaksolliseksi funktioksi $s_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$s_1(t) := s(pt) \tag{37}$$

eli $s(t) = s_1(t/p)$. Niinpä jatkossa käsittelemme VAIN yksijaksollisia signaaleja.

Energia. Signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ “energia” on

$$E(s) = \|s\|^2 := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |s(t)|^2 dt = \int_0^1 |s(t)|^2 dt \tag{38}$$

ja meille “hyviä signaaleja” ovat ne, joilla energia $E(s) < \infty$, jolloin merkitään $s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Tässä $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ on äärellisen energian analogisten 1-jaksollisten signaalien vektoriarvuus. Huomaa, että tässä jaksollisessa tapauksessa integroidaan vain yhden ajanjakson yli, ei siis enää koko reaaliakselin \mathbb{R} yli!

Fourier-kerroinmuunnos. 1-jaksollisen signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos on funktio $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, joka määritellään kaavalla

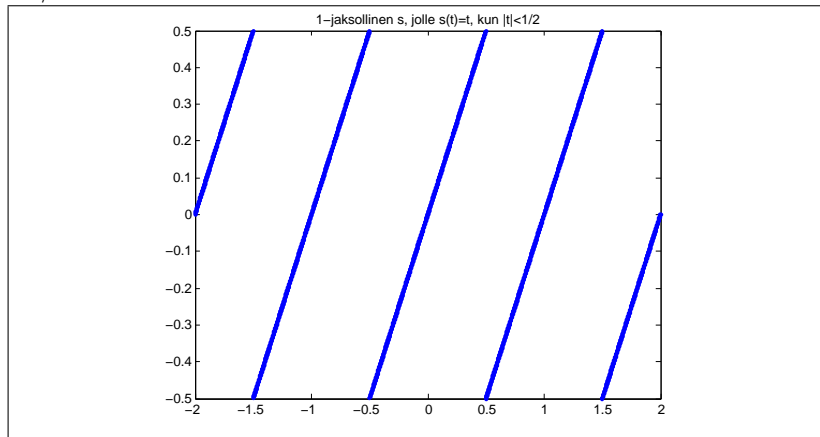
$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt = \int_0^1 s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt, \quad (39)$$

mikäli tämä integraali on laskettavissa. Lukuja $\widehat{s}(\nu) \in \mathbb{C}$ sanotaan signaalin Fourier-kertoimiksi. Voidaan merkitä selvyuden vuoksi myös

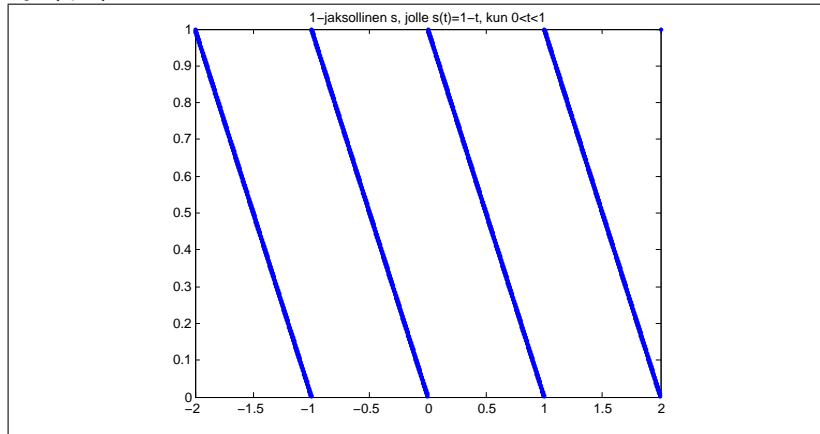
$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} s = \widehat{s},$$

kun halutaan korostaa, että signaali $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on 1-jaksollinen.

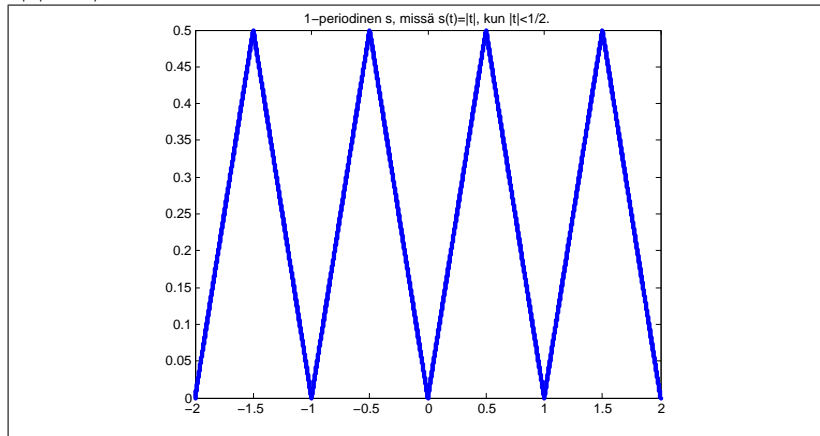
Tehtävä. Laske signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet, missä $s(t) = t$, kun $|t| < 1/2$.



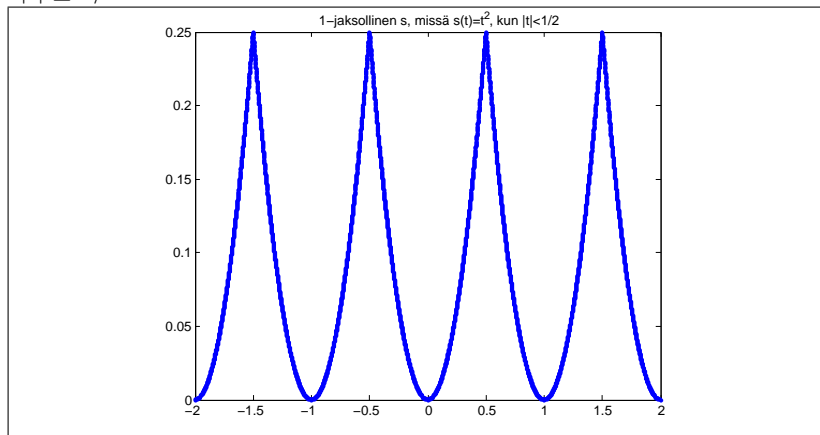
Tehtävä. Laske signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet, missä $s(t) = 1 - t$, kun $0 < t < 1$.



Tehtävä. Laske signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet, missä $s(t) = |t|$, kun $|t| \leq 1/2$.



Tehtävä. Laske signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet, missä $s(t) = t^2$, kun $|t| \leq 1/2$.



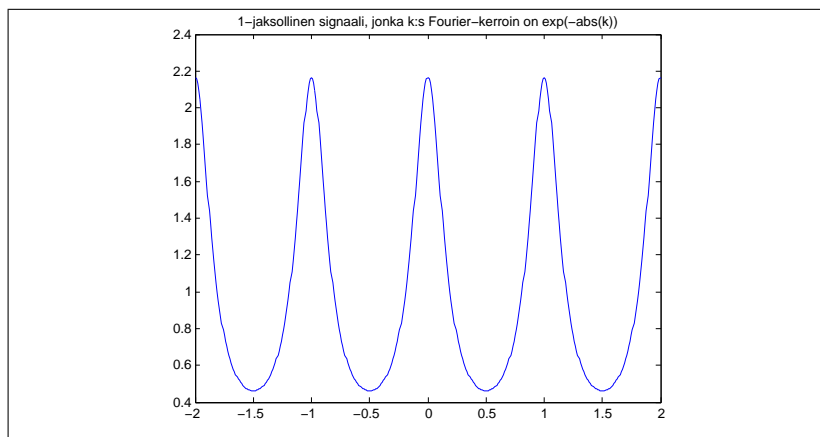
Tehtävä. Laske signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet, missä

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < 1/2, \\ 0, & \text{kun } 1/2 \leq 0 \leq 1. \end{cases}$$

Tehtävä. Näytä, että $\widehat{s}(\nu) = c_\nu \in \mathbb{C}$, kun $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään

$$s(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i2\pi t \cdot k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi t \cdot k}$$

(toki olettaen, että s on “riittävän mukava”).



Huomautus: Pian osoittautuu, ettei edellisen tehtävän ilmiö ollutkaan satunnaa: jokainen “riittävän mukava” $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ voidaan palauttaa Fourier-kertoimistaan $\widehat{s}(\nu) \in \mathbb{C}$ Fourier-sarjana

$$s(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) e^{+i2\pi t \cdot \nu} \quad (40)$$

— voidaan ajatella, että periodisessa analogisessa signaalissa s on tällöin sama informaatio kuin ei-periodisessa digitaalisessa signaalissa $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Kurssin alussa esiteltyyn signaalien luokitteluun (A0, A1, D0, D1) mielessä tämä tarkoittaa sitä, että luokat (A1) ja (D0) ovat Fourier-muunnoksen kautta duaalisia niin, että näiden luokkien ominaisuudet ovat toistensa “peilikuvia”.

Tehtävä. Laske “mukavan” signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet, kun

$$s(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{+i2\pi t \cdot kp},$$

missä $p \geq 1$ on kokonaisluku.

Tehtävä. Miten signaalin $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ja sen derivaatan $s' : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet liittyvät toisiinsa?

Tehtävä. Kurssilla käyttämämme “moderni” Fourier-sarja on muotoa

$$s(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu).$$

Monissa lähteissä käytetään kömpelöä trigonometrista versiota

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi tk) + b_k \sin(2\pi tk)).$$

Etsi muunnoskaavat vakioiden a_k, b_k ja Fourier-kerrointen $\widehat{s}(\nu)$ välillä. (Kertoimia a_k, b_k kutsutaan *kosini- ja sinisarjojen* kertoimiksi.)

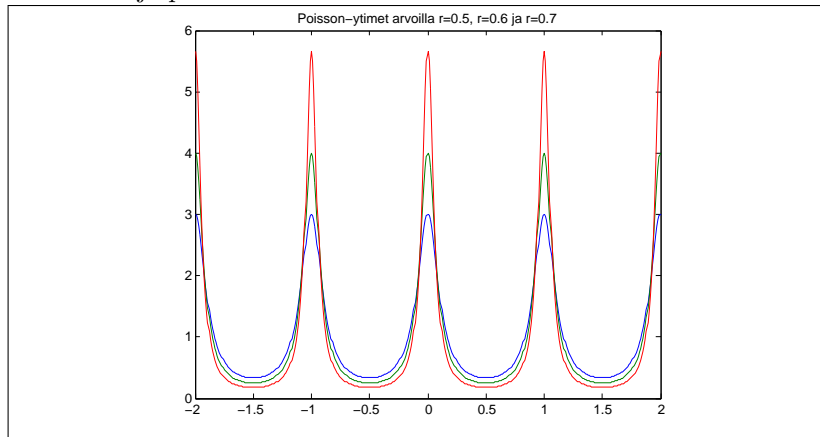
Tehtävä. Kun $0 < r < 1$, määritellään *Poisson-ydin* $P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$P_r(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{i2\pi t \cdot k}. \quad (41)$$

Näytä geometrisen summan avulla, että

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2\pi t)}.$$

Näytä lisäksi, että $0 < P_r(t) < \infty$ ja että $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} P_r(t) dt = 1$. Laske myös Poisson-ytimen suurin ja pienin arvo.



Fourier-kertoimille käänteismuunnos? Fourier-sarja! Jos tiedetään vain Fourier-kertoimet $\widehat{s}(k)$, kun $k \in \mathbb{Z}$, voidaanko tästä tiedosta palauttaa 1-jaksollinen signaali $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$? Vastaus on kyllä, jos s on riittävän mukava! Jotta laskussa alkuun päästään, oletetaan signaalin sileys. Silloin

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^1 s(u) P_r(t - u) du \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^1 s(u) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} r^{|\nu|} e^{i2\pi(t-u)\cdot\nu} du \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) r^{|\nu|} e^{i2\pi t \cdot \nu} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) e^{i2\pi t \cdot \nu}. \end{aligned}$$

Vaihtoehtoinen päättely käänteismuunnokselle. Äskeinen Fourier-sarjan päättely oli erittäin läheistä sukua Fourier-integraalin käänteismuunnoksen kaavan perustelulle. Oikeastaan vain korvasimme ei-periodisen Gaussin normaali-

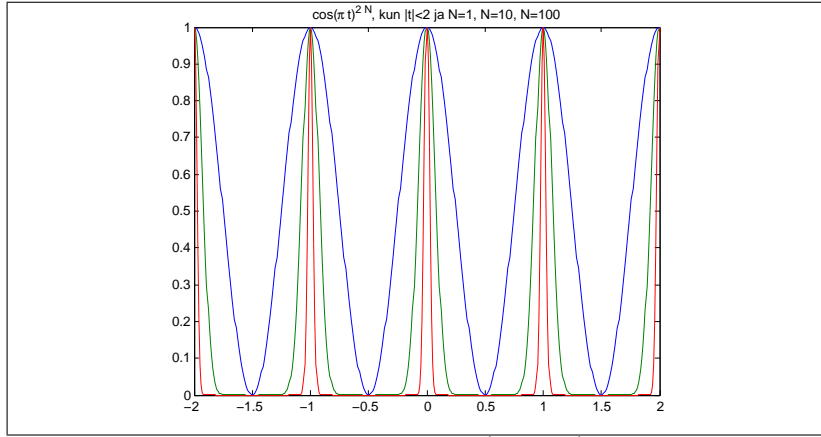
jakauman periodisella Poisson-ytimellä! Fourier-sarjan voi löytää myös muunlaisten periodisten ytimien avulla. Esimerkiksi

$$s(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 s(u) Y_N(t-u) du,$$

missä ydinfunktio $Y_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ on (esimerkiksi) muotoa

$$Y_N(t) := c_N \cos(\pi t)^{2N}, \quad (42)$$

missä $N \in \mathbb{Z}^+$ ja vakio $c_N \in \mathbb{R}$ valitaan siten, että $\int_0^1 Y_N(t) dt = 1$.



On helppo havaita, että koska $2 \cos(\pi t) = e^{+i\pi t} + e^{-i\pi t}$, seuraa binomikaavasta

$$\begin{aligned} Y_N(t) &= \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} e^{+i\pi t \cdot (2N-k)} e^{-i\pi t \cdot k} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} e^{+i2\pi t \cdot (N-k)}. \end{aligned}$$

Siispä saadaan

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 s(u) Y_N(t-u) du \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 s(u) \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} e^{+i2\pi(t-u) \cdot (N-k)} du \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} \int_0^1 s(u) e^{+i2\pi(t-u) \cdot (N-k)} du \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} \widehat{s}(N-k) e^{+i2\pi t \cdot (N-k)} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) e^{+i2\pi t \cdot \nu} \end{aligned}$$

edellyttäen, että laskun välivaiheet olivat hyvin perusteltuja!

Tehtävä. Täydennä edelliseen Fourier-sarjan käänneismuunnoksen laskuun välivaiheet ja perustelut. Lasku oli ok ainakin, kun $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ niin, että

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{s}(\nu)| < \infty,$$

jolloin s on automaattisesti myös jatkuva.

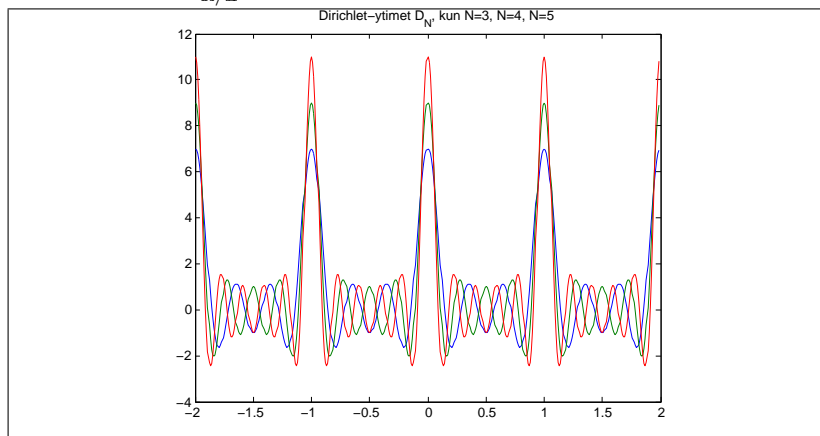
Tehtävä. Fourier-sarja olisi voitu löytää myös tarkastelemalla Poisson-ytimen sijaan niin sanottua Dirichlet-ydintä. Kun $N \in \mathbb{Z}^+$, määritellään *Dirichlet-ydin* $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^N e^{i2\pi t \cdot k}.$$

Näytä, että

$$D_N(t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

Näytä lisäksi, että $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} D_N(t) dt = 1$.



Haastava tehtävä: 1-jaksollisten testifunktioiden avaruus $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ koostuu “äärettömän sileistä” (eli mielivaltaisen monta kertaa derivoituvista) funktioista $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Osoita, että Fourier-muunnoksen antama kuvaus

$$(s \rightarrow \widehat{s}) : C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})$$

on bijektio, missä avaruus $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ koostuu “nopeasti vähenevistä” funktioista $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, joille

$$\sup_{\nu \in \mathbb{Z}} |\nu^N g(\nu)| < \infty$$

jokaisella $N \in \mathbb{Z}^+$.

Fourier-muunnos on unitaarinen: Tarkastellaan signaaleja $r, s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ja niiden Fourier-muunnoksia $\widehat{r}, \widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle &:= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{r}(\nu) \overline{\widehat{s}(\nu)} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{r}(\nu) \overline{\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt} \\ &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{r}(\nu) \overline{s(t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} r(t) \overline{s(t)} dt =: \langle r, s \rangle. \end{aligned}$$

Toisin sanoen Fourier-muunnos on unitaarinen eli se säilyttää signaalien normit ja niiden väliset kulmat! Lyhyesti sanoen sisätulot säilyvät eli

$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = \langle r, s \rangle. \quad (43)$$

Tästä toki seuraa välittömästi energian säilyminen:

$$\|\widehat{s}\|^2 = \langle \widehat{s}, \widehat{s} \rangle = \langle s, s \rangle = \|s\|^2. \quad (44)$$

Konvoluutiot. 1-jaksollisten signaalien $r, s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ konvoluutio $r * s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$r * s(t) := \int_0^1 r(t-u) s(u) du, \quad (45)$$

mikäli tämä integraali on laskettavissa. Vastaavasti funktioiden $\widehat{r}, \widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetti konvoluutio $\widehat{r} * \widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään

$$\widehat{r} * \widehat{s}(\nu) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{r}(\nu - \alpha) \widehat{s}(\alpha), \quad (46)$$

mikäli tämä sarja suppenee.

Konvoluutio Fourier-muuntuu tuloksi ja päinvastoin. Tarkastellaan 1-jaksollisia signaaleja $r, s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Näytä laskemalla, että

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu), \quad (47)$$

$$\widehat{r} \widehat{s}(\nu) = \widehat{r} * \widehat{s}(\nu), \quad (48)$$

missä $(r s)(t) := r(t) s(t)$.

Periodinen konvoluutio ja silotus. Jaksollisten analogisten signaalien $r, s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tapauksessa $(r * s)' = r' * s$ eli

$$(r * s)'(t) = r' * s(t) \quad (49)$$

jokaisella $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (todistus laskemalla aivan kuten jaksottomien analogisten signaalien tapauksessa). Siten $r * s$ on sileä, jos r on sileä.

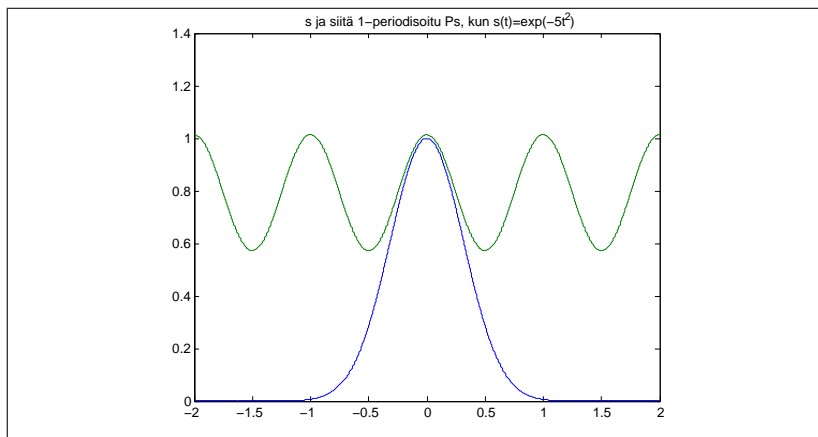
Tehtävä. Laske $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

Vihje: Tarkastele tapauksessa $s(t) = t$ (kun $|t| < 1/2$) Fourier-sarjaa

$$s * s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi t \cdot n} \widehat{s * s}(n)$$

kohdassa $t = 0$. Laske siis $s * s(0)$ ja $\widehat{s * s}(n)$.

4.3 Jaksottoman analogisen signaalin periodisointi



Kuinka Fourier-integraali ja Fourier-sarja liittyvät toisiinsa? *Periodisoidaan* eli *jaksollistetaan* signaali $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ signaaliksi $\mathcal{P}s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ siten, että

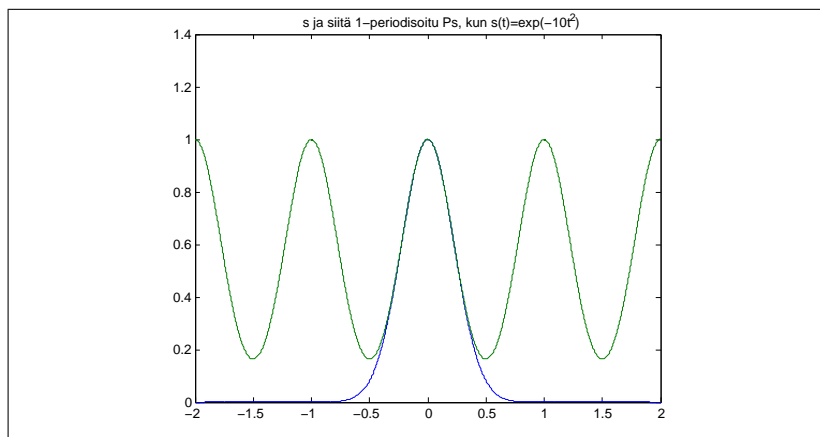
$$\mathcal{P}s(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - k) \quad (50)$$

(tämä on ok ainakin, jos s on jatkuva ja sarja suppenee itseisesti jokaisella $t \in [0, 1]$). Nyt jos $\nu \in \mathbb{Z}$, niin

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}s}(\nu) &= \int_0^1 e^{-i2\pi t \cdot \nu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - k) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t - k) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt \\ &= \widehat{s}(\nu). \end{aligned}$$

Siis periodisoidun signaalin $\mathcal{P}s$ Fourier-kertoimet $\widehat{\mathcal{P}s}(\nu)$ vastaavat luonnollisesti alkuperäisen signaalin Fourier-muunnoksen arvoja $\widehat{s}(\nu)$ kokonaislukupisteissä $\nu \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:

$$\widehat{\mathcal{P}s}(\nu) = \widehat{s}(\nu), \quad \text{kun } \nu \in \mathbb{Z}. \quad (51)$$



Tehtävä. Todista **Poisson-summauskaava**

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \hat{s}(\nu). \quad (52)$$

4.4 Analoginen maailma (A0 + A1)

Tähän mennessä olemme käsitelleet analogisia signaaleja $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, jotka voivat olla joko jaksottomia (tapaus A0) tai jaksollisia (tapaus A1). Tapauksen (A0) signaalille $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ määriteltiin Fourier-muunnos $\hat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tarkemmin sanoen Fourier-integraalimuunnos. Tämän käänteismuunnos oli myös integraalityyppinen. Tapauksen (A1) signaalille $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määriteltiin Fourier-muunnos $\hat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, tarkemmin sanoen Fourier-kerroinmuunnos. Tämän käänteismuunnos oli muodoltaan Fourier-sarja. Yllä esitelty periodisointi ja Poisson-summauskaava rakentavat yhteyden tapauksen (A0) ja (A1) välille.

Näiden eri Fourier-muunnosten ja Fourier-käänteismuunnosten lisäksi keskeisiä käsitteitä olivat signaalin energia ja energian säilyminen sekä erilaiset konvoluutiot.

5 Digitaalinen maailma: diskreetin ajan muunnokset

Tällä kurssilla *digitaalisella signaalilla* tarkoitetaan funktiota

$$s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C},$$

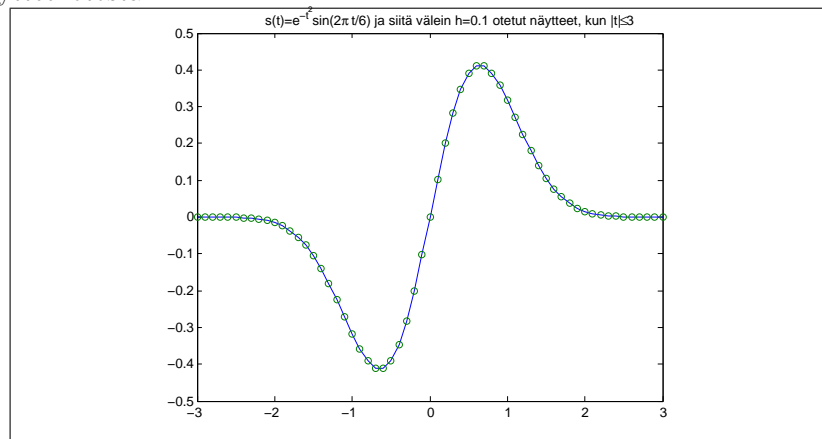
missä $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ on *diskreetti aika-avaruus*. Jaksottoman digitaalisen signaalin Fourier-muunnosta kutsutaan *diskreetin ajan Fourier-muunnokseksi* (DTFT, Discrete Time Fourier Transform, signaalien luokka (D0)). Jaksollisten eli periodisten digitaalisten signaalien tapausta kutsutaan *diskreetiksi Fourier-muunnokseksi* (DFT, Discrete Fourier Transform, signaalien luokka (D1)), jonka numeerinen laskenta on paras suorittaa ns. “*nopealla Fourier-muunnoksella*” (FFT, Fast Fourier Transform), joka on eräs tekniikan ja luonnontieteen aloilla hyödyllisimpiä algoritmeja.

5.1 Diskreettiaikainen Fourier-muunnos DTFT (Discrete-Time Fourier Transform) eli jaksottomien signaalien $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tapaus

Analogisesta jaksottomasta signaalista $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (signaalien luokka (A0)) saadaan digitaalinen jaksoton signaali $s_h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ (signaalien luokka (D0)) mittaamalla näytteitä h -pituisin aikavälein:

$$s_h(t) := s(th)$$

kaikilla $t \in \mathbb{Z}$. Toki on digitaalisia signaaleja, jotka eivät ole näytteitä mistään analogisesta signaalista, mutta usein käytännön sovelluksissa on kyse tällaisesta näytteenotosta.



5.1.1 Signaalien avaruus $\ell^2(\mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{Z})$

Diskreetin ajan $t \in \mathbb{Z}$ *äärellisen energian signaali* on ns. neliösummautuva funktio $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$: toisin sanoen signaalilla s on äärellinen “*energia*” $E(s) < \infty$,

missä

$$E(s) := \sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)|^2. \quad (53)$$

Näiden neliösummautuvien signaalien avaruutta merkitään $\ell^2(\mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{Z})$. Lisäksi tyypillisesti vaadimme, että signaali on “riittävän mukava” — siis kulloisenkin tarpeen mukaan niin hyväkäyttöksinen, että laskutoimituksemme kestävät kriittisen tarkastelun... ;)

Normi ja sisätulo: Nyt kannattaa kerrata, mitä sanottiin analogisten signaalien $s \in L^2(\mathbb{R})$ tapauksesta... Digitaalisen signaalin $s \in L^2(\mathbb{Z})$ *normi* on

$$\|s\| := \sqrt{E(s)} = \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)|^2 \right)^{1/2}. \quad (54)$$

Signaalien $r, s \in L^2(\mathbb{Z})$ *pistetulo* eli *sisätulo* on

$$\langle r, s \rangle := \sum_{t \in \mathbb{Z}} r(t) \overline{s(t)}. \quad (55)$$

Kun $a \in \mathbb{R}$, niin

$$0 \leq \|r + e^{ia} s\|^2 = \|r\|^2 + \|s\|^2 + 2\operatorname{Re}(e^{-ia} \langle r, s \rangle),$$

mistä seuraa ns. *Cauchy–Schwarz -epäyhtälö*

$$|\langle r, s \rangle| \leq \|r\| \|s\|. \quad (56)$$

Voidaan ajatella, että signaalien $r, s \in L^2(\mathbb{Z})$ “välinen kulma” on $\alpha \in \mathbb{R}$ tai $\pi - \alpha$, kun

$$\langle r, s \rangle = \|r\| \|s\| \cos(\alpha);$$

erityisesti r, s ovat “toisiaan vastaan kohtisuorassa”, jos $\langle r, s \rangle = 0$.

Tehtävä. Tarkista Cauchy–Schwarz -epäyhtälön todistuksen välivaiheet, ja todista sen avulla ns. Minkowskin *kolmioepäyhtälö*

$$\|r + s\| \leq \|r\| + \|s\| \quad (57)$$

signaaleille $r, s \in L^2(\mathbb{Z})$.

Signaalien vektoriavaruus: kun $r, s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ja $c \in \mathbb{C}$, määritellään funktiot $cs, r + s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ luonnollisesti kaavoilla

$$\begin{aligned} (cs)(t) &:= c s(t), \\ (r + s)(t) &:= r(t) + s(t) \end{aligned}$$

jokaisella $t \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että $cs, r + s \in L^2(\mathbb{Z})$, jos $r + s \in L^2(\mathbb{Z})$. Toisin sanoen signaalien avaruus $L^2(\mathbb{Z})$ voidaan tulkita vektoriavaruudeksi. Tässä vektoriavaruudessa voidaan ajatella signaalien $r, s \in L^2(\mathbb{Z})$ väliseksi etäisyydeksi lukua

$$\|r - s\| = \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} |r(t) - s(t)|^2 \right)^{1/2}.$$

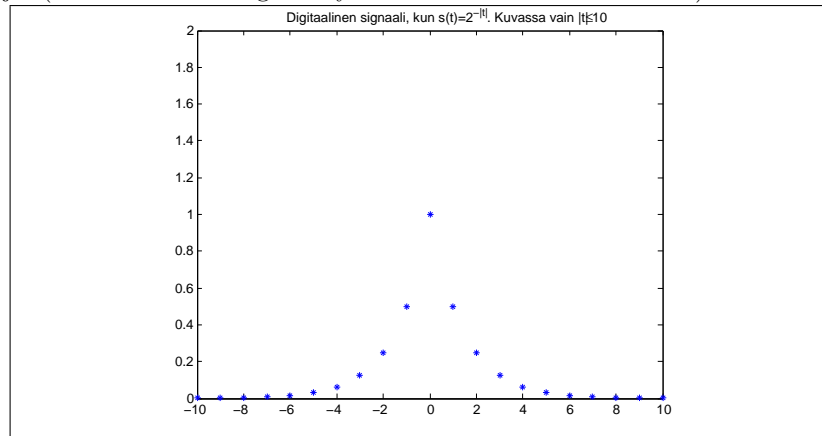
5.1.2 Fourier-muunnos ($s \mapsto \hat{s}$) : $L^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

Jaksottoman digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos on jaksollinen analoginen signaali $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(s) = \hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, missä

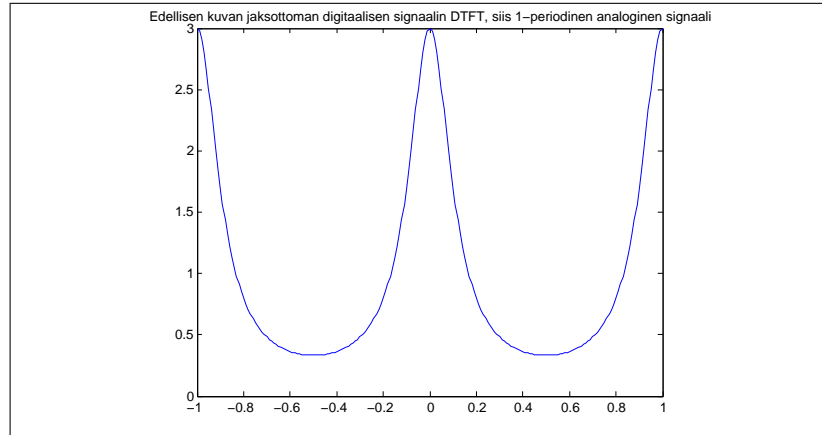
$$\hat{s}(\nu) := \sum_{t \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t). \quad (58)$$

Tämä muunnos $s \mapsto \hat{s}$ on nimeltään *diskreetin ajan Fourier-muunnos* eli *Discrete Time Fourier Transform (DTFT)*.

Melkein tuttua? DTFT on olennaisesti samanlainen kuin aiempi Fourier-sarja. (Huom! Tässä imaginaariyksikön i etumerkki on miinus.)



Tehtävä. Laske digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos (DTFT) $\hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, kun $s(t) = 2^{-|t|}$.



DTFT:n käänteismuunnos Signaalin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ DTFT $\hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ lasketaan

$$\hat{s}(\nu) := \sum_{t \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t).$$

DTFT:n käänteismuunnos $\hat{s} \mapsto s$ saadaan suoralla laskulla:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \hat{s}(\nu) \, d\nu &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \sum_{u \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi u \cdot \nu} s(u) \, d\nu \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}} s(u) \int_0^1 e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} \, d\nu \\ &= s(t). \end{aligned}$$

Saatiin siis

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \hat{s}(\nu) \, d\nu. \quad (59)$$

Tässä vaiheessa kurssia tämän pitäisi olla hyvin tuttua: kaava on ilmeisen läheistä sukua periodisen signaalin Fourier-kertoimien laskulle. Tämä ei ole ihme: signaalien luokat (A1) ja (D0) ovat toistensa “duaalit” Fourier-muunnoksen suhteen, ja niiden ominaisuudet ovat siten olennaisesti toistensa peilikuvat. Siten meidän ei tarvitse tarkistaa esimerkiksi DTFT:n energian säilyttävyyttä: me tiedämme sen jo!

5.1.3 Konvoluutio

Jaksottomille digitaalisille signaaleille $r, s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, määritellään *konvoluutio* $r * s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$r * s(t) := \sum_{u \in \mathbb{Z}} r(t - u) s(u) \quad (60)$$

mikäli signaalit r, s ovat riittävän mukavia (eli silloin, kun tässä sarja suppenee).

Tehtävä. Tarkista, että jaksottomien digitaalisten signaalien konvoluutiolle pätee $\widehat{r * s} = \widehat{r} \widehat{s}$ eli että

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu).$$

5.1.4 Analogisten ja digitaalisten signaalien yhteys jaksottomassa tapauksessa

Tutkitaan nyt, miten jaksottomat analogiset signaalit (A0) liittyvät jaksotomiin digitaalisiin signaaleihin (D0). Tarkastellaan riittävän mukavaa jaksotonta analogista signaalia $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Poisson-summakaava

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k)$$

on yhtäpitävä seuraavan kaavan kanssa:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu - \alpha) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) e^{-i2\pi k \cdot \nu}. \quad (61)$$

Todistetaan tämä kaava kuitenkin suoraan periodisoinnin Fourier-sarjan avulla:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu - \alpha) = \mathcal{P}\widehat{s}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi k \cdot \nu} \widehat{\mathcal{P}\widehat{s}}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi k \cdot \nu} s(-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi k \cdot \nu} s(k).$$

Mitä tästä seuraa? Olkoon nyt $s_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sellainen, että

$$\widehat{s}_1(\nu) = 0 \text{ aina kun } |\nu| \geq 1/2.$$

Silloin

$$\begin{aligned} \widehat{s}_1(\nu) &= \mathbf{1}_{]-1/2, +1/2[}(\nu) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}_1(\nu - \alpha) \\ &\stackrel{(61)}{=} \mathbf{1}_{]-1/2, +1/2[}(\nu) \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) e^{-i2\pi k \cdot \nu} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) e^{-i2\pi k \cdot \nu} \mathbf{1}_{]-1/2, +1/2[}(\nu), \end{aligned}$$

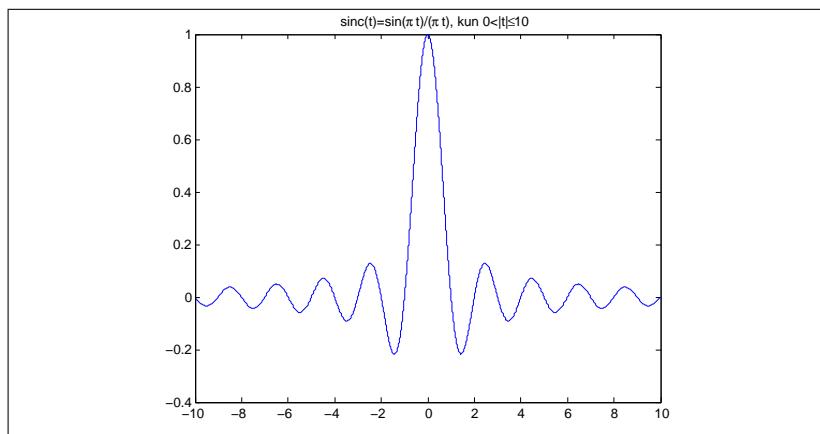
siis

$$\widehat{s}_1(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) e^{-i2\pi k \cdot \nu} \mathbf{1}_{]-1/2, +1/2[}(\nu),$$

mikä Fourier-käänteismuunnettuna johtaa **normalisoituun Whittaker–Shannon-näytekaavaan**

$$s_1(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) \operatorname{sinc}(t - k), \quad (62)$$

missä siis $\widehat{s}_1(\nu) = 0$ aina kun $|\nu| \geq 1/2$.



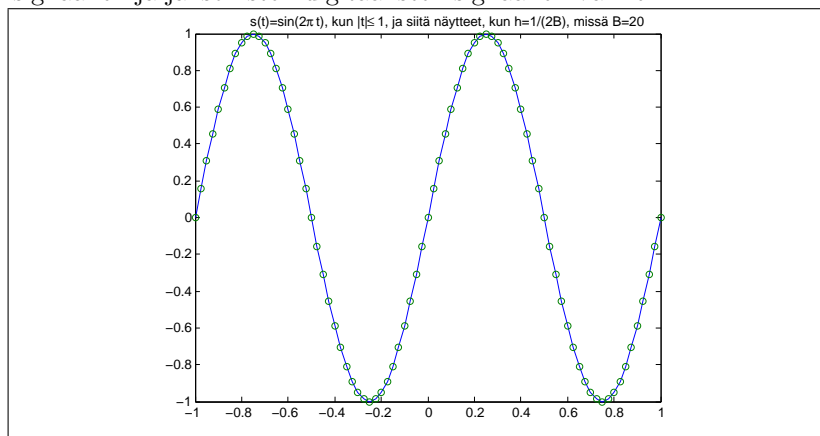
Jos $\hat{s}(\nu) = 0$ aina kun $|\nu| \geq B$, niin normalisoidusta Whittaker–Shannon -näytekaavasta saadaan sopivan muuttujanvaihdon avulla yleinen **Whittaker–Shannon näytekaava**

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{k}{2B}\right) \text{sinc}(2Bt - k), \quad (63)$$

Tähän kaavaan liittyvä **Nyquist–Shannon -näytelause** sanoo: Jos analoginen signaali $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on **kaistarajoitettu** (engl. **band-limited**) (mikä tarkoittaa $\hat{s}(\nu) = 0$ aina kun $|\nu| \geq B$), niin s voidaan palauttaa tasavälisesti otetuista näytearvoista eli vastaavasta digitaalisesta signaalista $r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, jolle

$$r(k) := s\left(\frac{k}{2B}\right).$$

Toisin sanoen Whittaker–Shannon -kaava rakentaa sillan jaksottomien analogisten signaalien ja jaksollisten digitaalisten signaalien välille!



Huom. Nyquist–Shannon -näytelauseen viesti on: jos signaalissa s on vain alle B :n taajuuksia, niin s voidaan (teoriassa) palauttaa näytteistä $s(k/(2B))$, missä $k \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki. CD-levylle tallennetaan (monofoninen) äänite, jossa on 44100 näytettä sekunnissa. Tällöin Nyquist-Shannon -näytelauseen mukaan on CD-tallenteesta mahdollista rekonstruoida alkuperäinen ääni, **jos** siinä ei ole taajuuksia yli rajan $44100/2 = 22050$ Hz. Käytännössä ei kuitenkaan kannata olettaa liikoja rekonstruktion laadusta teoreettisen ylärajan tuntumassa...

5.2 Diskreetti Fourier-muunnos DFT eli jaksollisten signaalien $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tapaus ($s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$)

N -jaksollinen eli N -periodinen digitaalinen signaali $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ toteuttaa

$$s(t - N) = s(t) \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{Z}$$

— merkitään silloin

$$s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (64)$$

Tämän signaalin *diskreetti Fourier-muunnos* (DFT, Discrete Fourier Transform) $\hat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$\hat{s}(\nu) := \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t). \quad (65)$$

Huomaa, että eksponenttifunktiossa tässä on $t \cdot \nu / N$ eikä aikaisempi $t \cdot \nu$. Helppo harjoitustehtävä: perustelee itsellesi, miksi pätee

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{t=0}^{N-1} e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t).$$

Tehtävä. Määritellään $e_\alpha, \delta_a : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavoilla

$$e_\alpha(t) := e^{+i2\pi t \cdot \alpha / N}, \quad \delta_a(t) := \begin{cases} 1, & \text{jos } (t - a)/N \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Laske $\hat{e}_\nu, \hat{\delta}_a : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

(Tässä δ_a on nimeltään *Kronecker-delta*, ja se on jatkuvan ajan *Dirac-deltan* diskreettiaikainen sukulainen.)

Tehtävä. Miten $\hat{r} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ liittyy signaaliin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, kun $r = \hat{s}$?

Tehtävä. Näytä, että DFT:n käänteismuunnos $\hat{s} \mapsto s$ lasketaan

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N e^{+i2\pi t \cdot \nu / N} \hat{s}(\nu). \quad (66)$$

Huomaa kerroin $\frac{1}{N}$ tässä kaavassa!

Tehtävä. Määritellään nyt jaksollisen digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ energia kaavalla

$$\|s\|^2 := \sum_{t=1}^n |s(t)|^2. \quad (67)$$

Etsi vakio c_N niin, että kaikille signaaleille $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ pätee

$$\|s\|^2 = c_N \|\widehat{s}\|^2. \quad (68)$$

Siten tässä tapauksessa “energia säilyy vakiota vaille”.

Diskreetti periodinen konvoluutio. N -jaksollisten digitaalisten signaalien $r, s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetti konvoluutio $r * s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään

$$r * s(t) := \sum_{u=1}^N r(t-u) s(u). \quad (69)$$

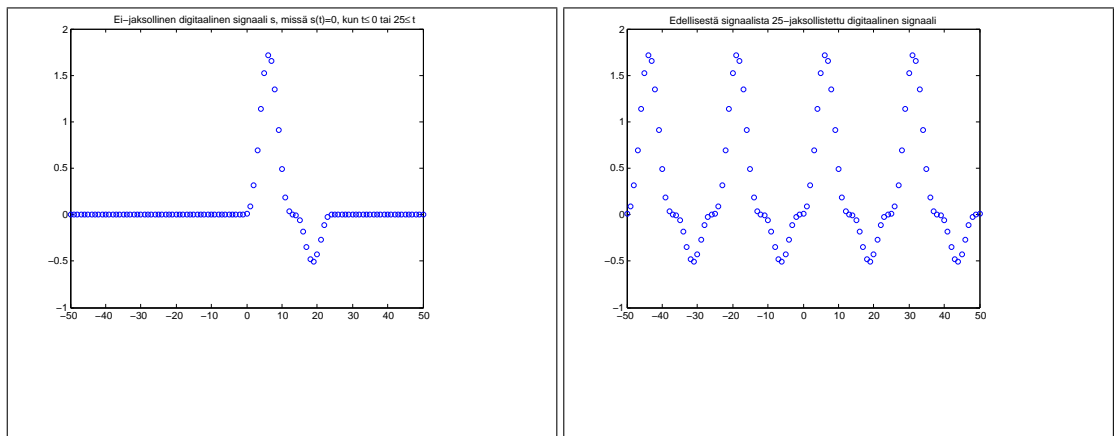
Tehtävä. Tarkista, että diskreetille periodiselle konvoluutiolle pätee $\widehat{r * s} = \widehat{r} \widehat{s}$, toisin sanoen kaikilla $\nu \in \mathbb{Z}$ (tai oikeammin $\nu \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) pätee

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu). \quad (70)$$

5.3 Jaksottoman digitaalisen signaalin periodisointi

“Mukavalle” jaksottomalle digitaaliselle signaalille $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ voidaan määrittellä jaksollinen digitaalinen signaali $s_N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$s_N(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - kN).$$



Silloin DFT $\widehat{s}_N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ja DTFT $\widehat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ liittyvät luonnollisesti toisiinsa:

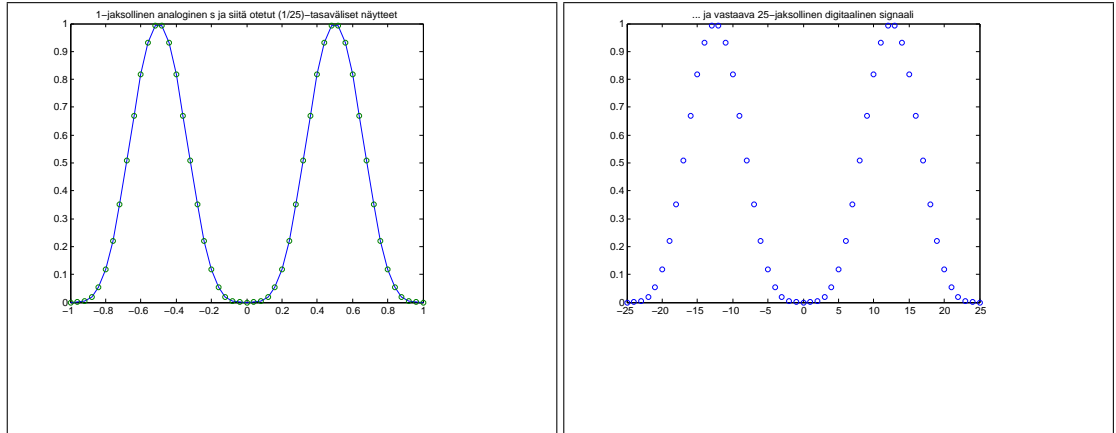
$$\begin{aligned}\widehat{s}_N(\nu) &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} s_N(t) \\ &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - kN) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi u \cdot \nu/N} s(u) = \widehat{s}(\nu/N).\end{aligned}$$

Siten $\widehat{s}_N(\nu) = \widehat{s}(\nu/N)$ kaikilla ν .

5.4 Jaksollisen analogisen signaalin digitointi

“Mukavalle” jaksolliselle analogiselle signaalille $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ voidaan määritellä jaksollinen digitaalinen signaali $s_N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$s_N(t) := s(t/N).$$



Silloin DFT $\widehat{s}_N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ja Fourier-kerroinmuunnos $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ liittyvät luonnollisesti toisiinsa:

$$\begin{aligned}\widehat{s}_N(\nu) &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} s(t/N) \\ &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\alpha) e^{+i2\pi(t/N) \cdot \alpha} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\alpha) \sum_{t=1}^N e^{i2\pi t \cdot (\alpha - \nu)/N} = N \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu - kN).\end{aligned}$$

Siten $\widehat{s}_N(\nu) = N \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu - kN)$ kaikilla $\nu \in \mathbb{Z}$.

5.5 Nopea Fourier-muunnos FFT (Fast Fourier Transform)

Nopea Fourier-muunnos **FFT** (Fast Fourier Transform) on tehokas keino laskea DFT. FFT on ns. "hajoita-ja-hallitse" -algoritmi, ja se on eräs insinööritieteiden ja sovelletun matematiikan tärkeimmistä työkaluista.

FFT:n idea. Halutaan laskea jaksollisen digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos $F_N s = \hat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Yleisyyttä menettämättä oletetaan nyt, että $N = 2^k \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, \dots\}$. Jaetaan silloin laskenta kahdeksi pienempikokoiseksi DFT:ksi:

$$\begin{aligned} F_N s(\nu) &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t) \\ &= \sum_{t \in \{1, 3, 5, \dots, N-1\}} e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t) + \sum_{t \in \{2, 4, 6, \dots, N\}} e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t) \\ &= \sum_{t=1}^{N/2} e^{-i2\pi(2t-1) \cdot \nu / N} s(2t-1) + \sum_{t=1}^{N/2} e^{-i2\pi(2t) \cdot \nu / N} s(2t) \\ &= e^{+i2\pi \nu / N} F_{N/2} s_{\text{Odd}}(\nu) + F_{N/2} s_{\text{Even}}(\nu). \end{aligned}$$

Nyt meidän siis tarvitseekin olennaisesti laskea vain $F_{N/2} s_{\text{Odd}}$ and $F_{N/2} s_{\text{Even}}$...

Miksi FFT vaatii vain noin $N \log(N)$ laskenta-askelta? Algoritmin *kompleksisuus* tarkoittaa laskennan *työläyttä* eikä "kompleksilukuarvoisuutta"! Sanotaan, että algoritmin F_N kompleksisuus on laskennassa tarvittavien kertolaskujen "olennainen lukumäärä" M_N . Selvästi $M_1 = 1$ ja $M_N \leq N^2$, koska

$$F_N s(\nu) = \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t)$$

— tässähän on N kpl taajuuksia ν , ja toisaalta kullakin yksittäisellä taajuudella on tässä summassa N kpl termejä, joissa kussakin on yksi kertolasku. Toisaalta äsken saatiin

$$F_N s(\nu) = e^{+i2\pi \nu / N} F_{N/2} s_{\text{Odd}}(\nu) + F_{N/2} s_{\text{Even}}(\nu), \quad (71)$$

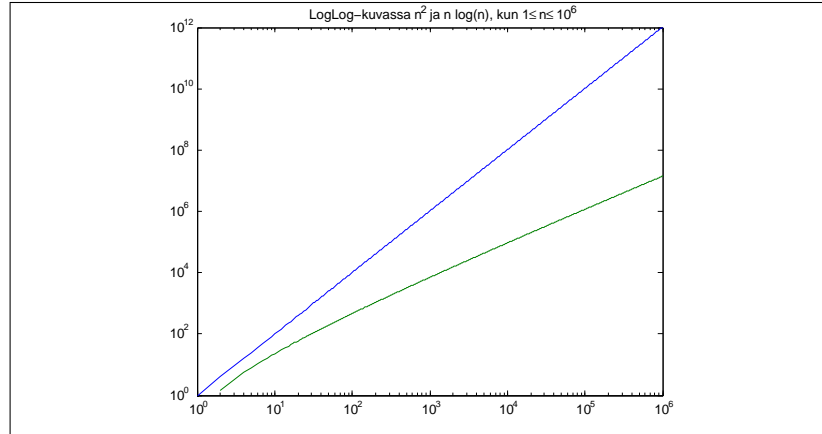
mistä seuraa

$$\begin{aligned} M_N &\stackrel{(71)}{\leq} N + 2 M_{N/2} \\ &\stackrel{(71)}{\leq} N + 2(N/2 + 2 M_{N/4}) = 2N + 4 M_{N/4} \\ &\stackrel{(71)}{\leq} 2N + 4(N/4 + 2 M_{N/8}) = 3N + 8 M_{N/8} \\ \dots &\stackrel{(71)}{\leq} \log_2(N) N + N M_{N/N} = N \log(N) + N \approx N \log(N). \end{aligned}$$

Yllä saatiin siis $M_N \leq N \log_2(N) + N$, mutta $N \ll N \log_2(N)$ “suurilla N ”, joten voidaan sanoa, että olennaisesti

$$M_N \lesssim N \log(N) \quad (72)$$

— logaritmin kantalukukin on toissijaista informaatiota.



Tehtävä. Laadi taulukko, jonka sarakkeina ovat luvut muotoa N , $N \log_{10}(N)$, N^2 ja $N^2/(N \log_{10}(N))$, missä taulukon riveinä ovat tapaukset

$$N \in \{10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}.$$

Nopea konvoluutio FFT:n avulla. Signaalien $r, s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetin konvoluution $r * s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ suoraviivainen laskenta vaatisi N^2 kertolaskua, koska

$$r * s(t) = \sum_{u=1}^N r(t-u) s(u).$$

Toisaalta

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu),$$

missä Fourier-muunnosten kertolasku $(\widehat{r}, \widehat{s}) \mapsto \widehat{r} \widehat{s}$ vie vain N kompleksilukujen kertolaskua. Muunnosten

$$r \mapsto \widehat{r}, \quad s \mapsto \widehat{s}, \quad \widehat{r} \widehat{s} \mapsto r * s$$

FFT-laskenta vie kukin vain noin $N \log(N)$ kertolaskuoperaatiota. Siten konvoluution $(r, s) \mapsto r * s$ laskennan olennainen kompleksisuus on vain luokkaa $N \log(N)$ (tarkemmin: $3N \log_2(N) + 4N \approx 3N \log_2(N)$, mutta usein tällainen tarkkuus on epäolennaista...).

Tehtävä. Selitä, kuinka voidaan toteuttaa polynomien kertolasku nopeasti konvoluution ja FFT:n avulla.

(Vihje: $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ ja $q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ voidaan tulkita vektoreina

$$a = (a_k)_{k=0}^{m+n}, \quad b = (b_k)_{k=0}^{m+n},$$

missä $a_k = 0$, jos $k > m$, ja $b_k = 0$, jos $k > n$. Silloin $p(x)q(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_l x^l$ vastaa vektoria $c = (c_l)_{l=0}^{m+n}$, missä c_l liittyy konvoluutioon..)

Tehtävä. Selitä, kuinka voidaan toteuttaa “suurten kokonaislukujen” kertolasku nopeasti konvoluution ja FFT:n avulla.

(Vihje: Kokonaisluvut voidaan kirjoittaa edellisen tehtävän polynomien tapaan vaikkapa 10-kantaisessa lukujärjestelmässä $p(10) = \sum_{k=0}^m a_k 10^k$, $q(10) = \sum_{k=0}^n b_k 10^k$, missä $a_k, b_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.)

FFT:n Matlab-laskenta. Matlab:n komento `fft` (Fast Fourier Transform) toimii seuraavasti:

vektori $\mathbf{X} = \text{fft}(\mathbf{x})$ lasketaan vektorista $\mathbf{x} = [x(1) \ x(2) \ \dots \ x(N)]$ kaavalla

$$X(m) = \sum_{k=1}^N e^{-i2\pi(k-1)(m-1)/N} x(k). \quad (73)$$

Huomaa, että meidän käyttämämme DFT:n määritelmä on

$$\hat{x}(m) := \sum_{k=1}^N e^{-i2\pi k \cdot m/N} x(k). \quad (74)$$

Siten tässä DFT ja Matlab:n `fft` poikkeavat toisistaan yhden indeksin verran sekä ajassa että taajuudessa, mikä on otettava laskuissa huomioon. **Sinua on siis varoitettu!!!** ;) Käyttämämme DFT on Fourier-analyysin kaavojen kannalta mukava toisin kuin Matlab:n `fft`. Esimerkiksi “konvoluutio on Fourier-muunnoksen toisella puolen kertolasku” ei päde Matlab-algoritmissa, mutta pätee toki DFT:ssä! Samoin Matlab-laskennassa taajuuksien skaala on “yhdellä pielessä”: kun $1 \leq k \leq N/2$ ja

$$\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_{N/2} \ X_{N/2+1} \ \dots \ X_{N-2} \ X_{N-1} \ X_N],$$

vastaa Fourier-kerroin X_{k+1} perustaaajuuden k -monikertaa (eikä $(k+1)$ -monikertaa!).

Matlab on kuitenkin muutoin mainio laskennallisessa Fourier-analyysissä ja signaalinkäsittelyssä.

Tehtävä. Oletetaan, että haluat laskea signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetin Fourier-muunnoksen $\hat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$; kuinka käytät tähän `fft`-komentoa?

Tehtävä. Olkoon `Matlab`-ohjelman merkinnöillä $\mathbf{X} = \text{fft}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Y} = \text{fft}(\mathbf{y})$ ja $\mathbf{Z} = \text{fft}(\mathbf{z})$, missä $\mathbf{Z} = \mathbf{X} * \mathbf{Y}$ on vektorien \mathbf{X} ja \mathbf{Y} kertolasku komponenteittain. Miten signaalien \mathbf{x} ja \mathbf{y} konvoluutio liittyy signaaliin \mathbf{z} ?

5.6 Digitaalinen maailma (D0 + D1)

Nyt käsitelimme digitaalisia signaaleja $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, jotka voivat olla joko jaksoittomia (tapaus D0) tai jaksollisia (tapaus D1). Tapauksen (D0) signaalille $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määriteltiin Fourier-muunnos $\hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, tarkemmin sanoen diskreetin ajan Fourier-muunnos (DTFT). Tämän käänteismuunnos oli Fourier-sarjatyypinen. Tapauksen (D1) signaalille $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ määriteltiin Fourier-muunnos $\hat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, tarkemmin sanoen diskreetti Fourier-muunnos (DFT). Tämän käänteismuunnos oli muodoltaan DFT-tyyppinen. Yllä esitelty periodisointi ja näytteenotto (Whittaker–Nyquist–Shannon) rakentavat yhteyden erilaisten Fourier-muunnosten välille.

Näiden eri Fourier-muunnosten ja Fourier-käänteismuunnosten lisäksi keskeisiä käsitteitä olivat signaalin energia ja energian säilyminen sekä erilaiset konvoluutiot.

DFT:n laskennassa tärkeä tehokas menetelmä oli FFT.

6 Aikataajuusanalyysi

Seuraavaksi pyrimme esittämään analogisen signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ aikataajuustasossa eli yhtä aikaa sekä ajan että taajuuden suhteen. Tällaisen aikataajuusanalyysin sovelluskohteita ovat mm. audiosignaalien käsittely (fonetiikka, puhevikojen hoito, äänisynteesi, eläinten äänien tutkimus, musiikki), EEG- ja EKG-datojen lääketieteellinen kuvitus, kaikuluotain- ja tutkasignaalien käsittely, seismologia, kvanttifysiikka jne.

Analogisen signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ aikataajuusjakauma on tyypillisesti funktio

$$As : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

missä $As(t, \nu) \in \mathbb{C}$ on “signaalin s intensiteetti aika-taajuudessa $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ”. Erilaisia aikataajuusjakaumia on lukuisia, erityisesti mainittakoon Leon Coehnin vuonna 1966 esittelemä bilineaaristen aikataajuusjakaumien perhe, johon kuuluvat esimerkiksi kaikki spektrogrammit ja ns. Born–Jordan -jakauma.

6.1 Ikkunoitu Fourier-muunnos (Windowed Fourier Transform) (STFT, Short-Time Fourier Transform) ja spektrogrammi

Seuraavassa tarkastellaan analogista signaalia $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ikkunan $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ avulla — usein voidaan myös ajatella, että w on toinen analoginen signaali. *w-ikkunoitu Fourier-muunnos* (**STFT**, Short-Time Fourier Transform) signaalille s on funktio $F(s, w) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, joka määritellään kaavalla

$$F(s, w)(t, \nu) := \widehat{s \overline{w}_t}(\nu), \quad (75)$$

missä $w_t(u) = w(u - t)$. Toisin sanoen

$$F(s, w)(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} s(u) \overline{w(u - t)} e^{-i2\pi u \cdot \nu} du.$$

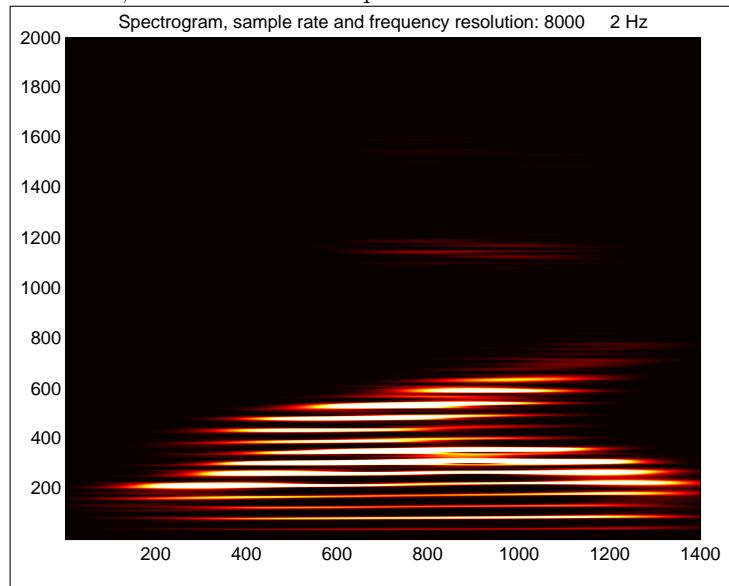
Idea: Fourier-muunnos $\widehat{s}(\nu)$ mittaa signaalin s “sisältöä” taajuudella $\nu \in \mathbb{R}$ yli kaikkien ajanhetkien. $F(s, w)(t, \nu)$ mittaa signaalin s “sisältöä” aikataajuudessa $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (kun signaalia s katsotaan ikkunan w läpi). Usein on syytä valita w niin, että “ $w(t) \approx 0 \approx \widehat{w}(\nu)$ suurilla $|t|, |\nu| \in \mathbb{R}$ ” (miksi?).

Spektrogrammi (Sonogrammi). *w-spektrogrammi* eli *w-ikkunoituun Fourier-muunnokseen* liittyvä spektrogrammi on

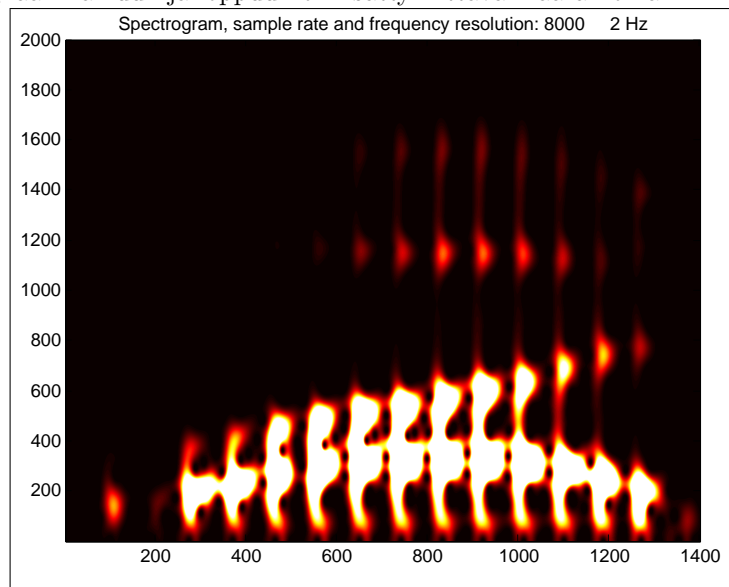
$$|F(s, w)|^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+. \quad (76)$$

Idea: $|F(s, w)(t, \nu)|^2 \geq 0$ on signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ “energian intensiteetti” aika-taajuudessa $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (kun signaalia s katsotaan ikkunan w läpi).

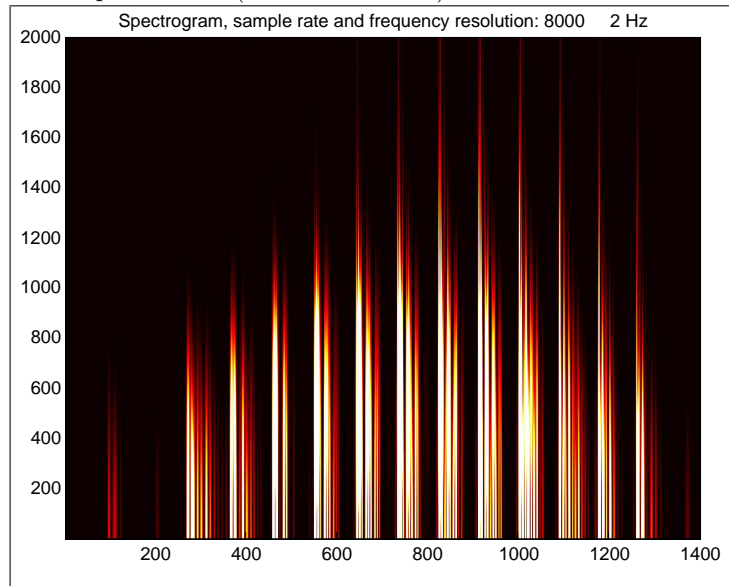
Esimerkkejä spektrogrammeista. Huomaa, että ikkunoitu Fourier-muunnos ja vastaava spektrogrammi riippuvat olennaisesti ikkunan w valinnasta! Seuraavissa spektrogrammeissa on kuvitettu sama signaali, jossa mies kysyy englanniksi “Why?”. Näissä spektrogrammeissa musta väri tarkoittaa matalaa energian intensiteettiä, kirkkaan valkoinen puolestaan korkeaa.



Tässä on otettu 1400 näytettä näytteenottotaajuudella 8000 Hz (eli aikavälin pituus on $1400/8000 = 0.175$ sekuntia), ja kuvien pystyakselin taajuusyksikkö on 2 Hz (siis kuvan pystyakselin luku 200 vastaa taajuutta 400 Hz) — laskennassa signaalin alkuun ja loppuun on lisätty riittävä määrä nollia.



Kussakin kuvassa aikaikkuna w on Gauss-tyyppinen funktio: ensimmäisessä kuvassa aikaikkuna on levein ja viimeisessä kapein. Leveä aikaikkuna paikallistaa taajuudet suht'hyvin, kun taas kapea aikaikkuna löytää suht'hyvin äänen äkilliset napsahdukset (äänen "narinan").



Spektrogrammien sumeus (väljästi sanoen) johtuu "mielivaltaisesta" aikaikkunan valinnasta ja epätarkkuusperiaatteesta. Kohta esittelemme Born–Jordan aikataajuusjakauman, jossa signaalille ei valita mitään aikaikkunaa ja joka tarkkuudessaan päihittää spektrogrammit. Fourier-analyysin epätarkkuusperiaate pätee Born–Jordan -tapauksessakin, mutta iso osa spektrogrammin sumeutta onkin aikaikkunan valinnan seurausta!

Spektrogrammin laskenta tietokoneella. Kokeile spektrogrammeja Matlab-ohjelmalla:

`help spectrogram`

... tai ohjelmoi itse oma spektrogrammisi: on helppo toteuttaa

$$|F(s, w)(t, \nu)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} s(u) \overline{w(u-t)} e^{-i2\pi u \nu} du \right|^2.$$

Tehtävä. Olkoon δ_p Dirac-delta hetkellä $p \in \mathbb{R}$ ja $e_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, missä $e_\alpha(t) = e^{i2\pi t \cdot \alpha}$. Miten ikkunan w valinta näkyy signaalien δ_p, e_α w -ikkunoiduissa Fourier-muunnoksissa ja vastaavissa spektrogrammeissa?

Tehtävä. Miten signaali s saadaan laskettua ikkunoidusta Fourier-muunnoksesta $F(s, w)$, kun ikkuna w tunnetaan ja $w(t) \neq 0$?

6.2 Born–Jordan -aikataajuusjakauma

Analogisten signaalien $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Born–Jordan -muunnos $Q(r, s) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään

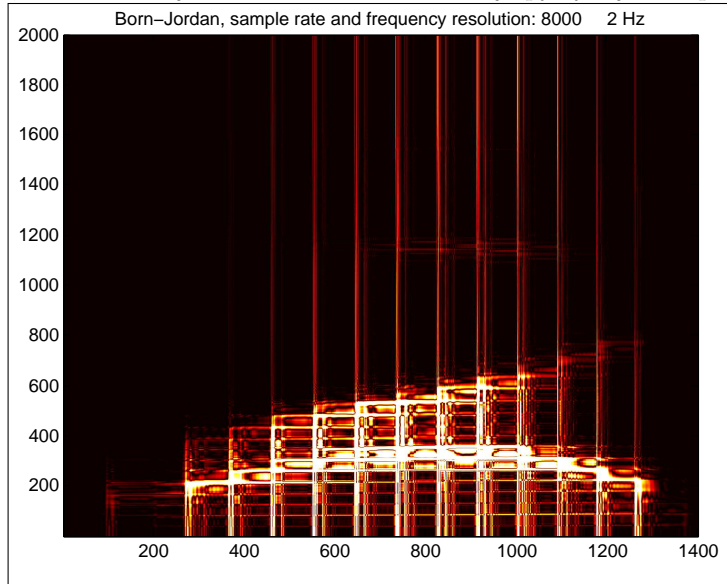
$$\begin{aligned} Q(r, s)(t, \nu) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi u \nu} \frac{1}{u} \int_{t-u/2}^{t+u/2} r(z + u/2) \overline{s(z - u/2)} dz du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi u \nu} \frac{1}{u} \int_t^{t+u} r(z) \overline{s(z - u)} dz du. \end{aligned}$$

Signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Born–Jordan -jakauma on

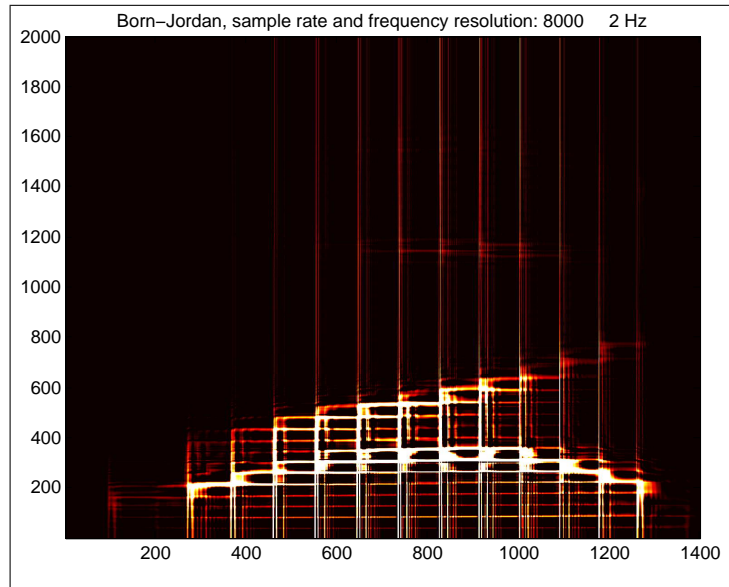
$$Qs = Q(s) := Q(s, s) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (77)$$

Tulkinta: $Qs(t, \nu) \in \mathbb{R}$ on signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ “energian intensiteetti” aikataajuudessa $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esimerkki. Born–Jordan -jakaumassa ei valittu mitään aikaikkunaa toisin kuin spektrogrammin laskennassa. Seuraavissa Born–Jordan -kuviissa on aiemasta tuttu signaali, jossa mies kysyy englanniksi “Why?”. Kuvia voi tulkita niin, että vaakalinjat ovat “viheltäviä ääniä” ja pystylinjat “napsauksia”:



Ylemmässä kuvassa oli (reaalisen) Born–Jordan -funktion itseisarvo, ja alemmassa kuvassa puolestaan funktion positiivinen osa (eli negatiiviset arvot leikataan siinä nollaksi):



Yhden spektrogrammin laskenta on yhtä työlästä kuin Born–Jordan -jakaumankin, mutta spektrogrammi vaikuttaa huomattavasti sumeammalta. Born–Jordan -jakauman parempi tarkkuus mahdollistaa jatkossa hyvien aikataajuussuodattimien suunnittelun. Lisäksi on syytä todeta, ettei signaalia s voida palauttaa spektrogrammistaan (paitsi pahasti vääristyneenä). Toisaalta s voidaan laskea Born–Jordan -jakaumasta Qs “ykkösen kokoista kompleksilukua vaille”: vakiolle $\lambda \in \mathbb{C}$ pätee $Q(\lambda s) = |\lambda|^2 Qs$, mutta jakaumasta Qs voidaan rekonstruoida helposti λs jollakin vakiolla λ , jolle $|\lambda| = 1$ (eli reaalisen signaalin tapauksessa siis löydetään joko s tai $-s$) — tämä käytännössä riittää.

Tehtävä. Näytä, että Qs on reaalinen ja laske

$$\int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) \, d\nu, \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) \, dt \, d\nu.$$

Tehtävä. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Born–Jordan -jakauma, kun $s(t) = \lambda e^{i2\pi t \cdot \alpha}$, missä $\lambda \in \mathbb{C}$ on vakio.

Born–Jordan -jakauman ominaisuuksia. Integroimalla saadaan seuraavat signaalin s luonnolliset marginaalijakaumat:

$$\int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) \, dt = |\widehat{s}(\nu)|^2,$$

$$\int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) \, d\nu = |s(t)|^2.$$

Siten energialle pätee

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) \, dt \, d\nu = \|s\|^2.$$

Ominaisuus

$$Q\widehat{s}(\nu, t) = Qs(-t, \nu)$$

voidaan ymmärtää niin, että Fourier-muunnos kääntää aikataajuustasoa 90° . Myös ajan ja taaajuuden siirrot näkyvät kuten pitääkin: jos

$$r(t) := s(t - t_0) \quad \text{ja} \quad q(t) := e^{i2\pi t \cdot \nu_0} s(t),$$

niin

$$\begin{aligned} Qr(t, \nu) &= Qs(t - t_0, \nu), \\ Qq(t, \nu) &= Qs(t, \nu - \nu_0). \end{aligned}$$

Dirac-delta ja kompleksinen eksponenttifunktio käyttäytyvät myös hyvin:

$$\begin{aligned} Q\delta_{t_0}(t, \nu) &= \delta_{t_0}(t), \\ Qe_{\nu_0}(t, \nu) &= \delta_{\nu_0}(\nu), \end{aligned}$$

missä $e_{\nu_0}(t) := e^{i2\pi t \cdot \nu_0}$. Ja sokerina pohjalla Born–Jordan -jakauman “interferenssin” hyvänlaatuisuutta osoittava laskelma: jos nyt $\alpha < \beta$, niin

$$Q(\lambda e_\alpha + \mu e_\beta)(t, \nu) = |\lambda|^2 \delta_\alpha(\nu) + |\mu|^2 \delta_\beta(\nu) + 2 \operatorname{Re}(\lambda \bar{\mu} e_{\alpha-\beta}(t)) \frac{\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(\nu)}{\beta - \alpha},$$

missä $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ vakioita — tässä nimittäin “interferenssi”

$$2 \operatorname{Re}(\lambda \bar{\mu} e_{\alpha-\beta}(t)) \frac{\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(\nu)}{\beta - \alpha}$$

on tasaisen kauniisti levittäytynyt aikataajuustason leveälle kaistaleelle Dirac-delta -osuuksien väliin, muttei laajemmalle — seikka, jota arvostaa, kun Coheinin luokan aikataajuusjakaumia on tarpeeksi ihmeteltyt.

Tehtävä. Todista ne yllä mainitut Born–Jordan -jakauman ominaisuudet, joita et ole vielä todistanut... ;)

Tehtävä. Kuinka saat palautettua signaalin s “ykkösen kokoista kompleksilukua vaille” Born–Jordan -jakaumasta Qs ?

Born–Jordan -suodattimien suunnittelu. *Aikataajuussymboli* on funktio $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Nyt suunnittelemme integraali-operaattorin L_σ niin, että saamme “parhaan mahdollisen Born–Jordan -likiarvon”

$$Q(L_\sigma s)(t, \nu) \approx \sigma(t, \nu) Qs(t, \nu)$$

kaikille signaaleille $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ja kaikille aikataajuuksille $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Operaattori L_σ määritellään kaavalla

$$\langle r, L_\sigma s \rangle := \langle Q(r, s), \sigma \rangle \tag{78}$$

kaikille signaaleille $r, s \in L^2(\mathbb{R})$ (yhtälön vasemmalla puolen sisätulo aikasuoralla, ja yhtälön oikealla puolella sisätulo aikataajuustasossa). Tässä

$$\begin{aligned}
\langle r, L_\sigma s \rangle &= \langle Q(r, s), \sigma \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Q(r, s)(z, \nu) \overline{\sigma(z, \nu)} dz d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi w \cdot \nu} \frac{1}{w} \int_{z-\frac{w}{2}}^{z+\frac{w}{2}} r(\tilde{t} + \frac{w}{2}) s(\tilde{t} - \frac{w}{2}) d\tilde{t} dw \overline{\sigma(z, \nu)} dz d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} r(t) \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) \frac{1}{u-t} \int_t^u \sigma(z, \nu) dz du d\nu \right]^* dt.
\end{aligned}$$

Siten

$$L_\sigma s(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) a(t, u, \nu) du d\nu, \quad (79)$$

missä *amplitudi* $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään $a(t, t, \nu) = \sigma(t, \nu)$ ja tapauksessa $t \neq u$ seuraavasti:

$$a(t, u, \nu) = \frac{1}{u-t} \int_t^u \sigma(z, \nu) dz. \quad (80)$$

Saatiin siis

$$L_\sigma s(t) = \int_{\mathbb{R}} K_{L_\sigma}(t, u) s(u) du,$$

missä integraalioperaattorin L_σ ydin $K_{L_\sigma} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ toteuttaa $K_{L_\sigma}(t, t) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(t, \nu) d\nu$ ja tapauksessa $t \neq u$:

$$K_{L_\sigma}(t, u) = \frac{1}{u-t} \int_t^u \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} \sigma(z, \nu) d\nu dz. \quad (81)$$

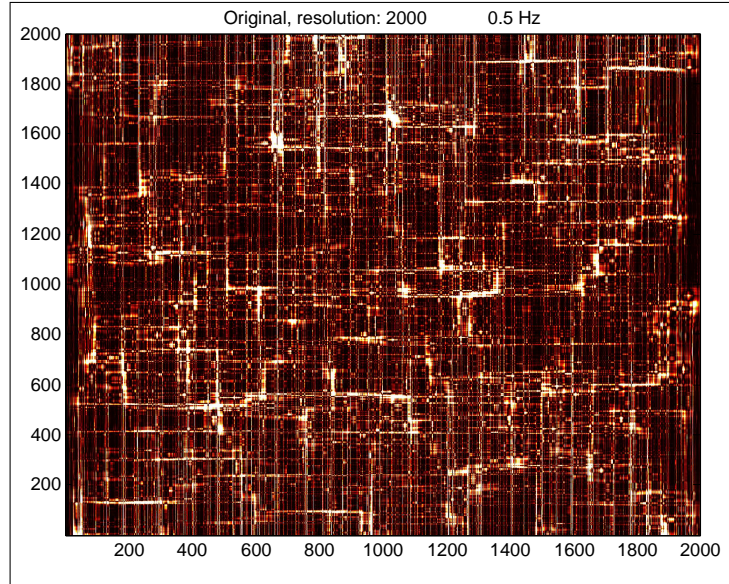
Esimerkki. Oletetaan aikainvarianssi $\sigma(t, \nu) = \widehat{\psi}(\nu)$ kaikilla $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Silloin toki $L_\sigma s = \psi * s$, koska

$$\begin{aligned}
L_\sigma s(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) \frac{1}{u-t} \int_t^u \widehat{\psi}(\nu) dz du d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) \widehat{\psi}(\nu) du d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu) \widehat{\psi}(\nu) d\nu = \psi * s(t).
\end{aligned}$$

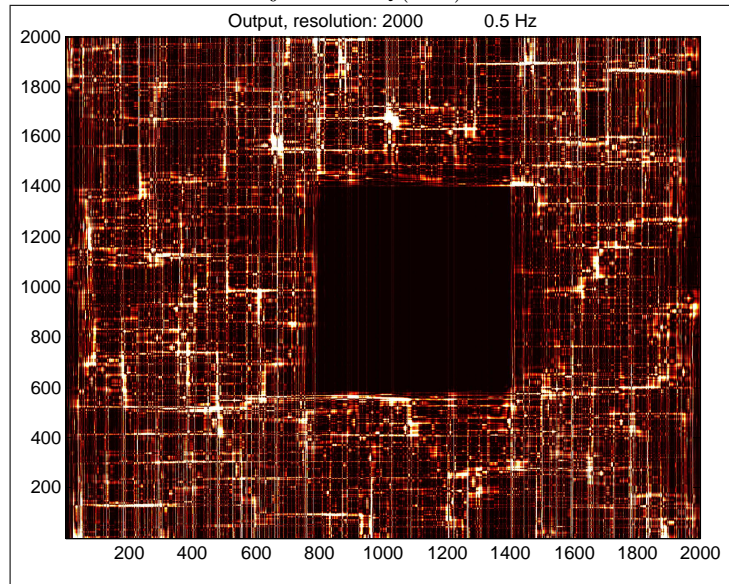
Esimerkki. Oletetaan taajuusinvarianssi $\sigma(t, \nu) = \varphi(t)$ kaikilla $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Silloin $a(t, u, \nu) = b(t, u)$, joten $L_\sigma s = \varphi s$, koska

$$\begin{aligned}
L_\sigma s(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) b(t, u) du d\nu \\
&= s(t) b(t, t) = \varphi(t) s(t).
\end{aligned}$$

Esimerkki. Seuraavassa kuvassa on Born–Jordan -jakauma Q_s Matlab:n randomennolla tuotetusta kohinasta s :



Nyt aikataajuussymboli $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ valitaan niin, että $\sigma(t, \nu) = 0$ eräässä aikataajuustason suorakaiteessa ja muutoin $\sigma(t, \nu) = 1$. Tässä suodatetun signaalin $L_\sigma s$ Born–Jordan -jakauma $Q(L_\sigma s)$:



Osaatko arvata, mikä oli se aikataajuustason suorakaide, jossa $\sigma(t, \nu) = 0$?

7 Yhteenveto

Ennen kertauskysymyksiä tarkastelemme vielä Fourier-muunnoksen historiaa ja mahdollisuutta (tai mahdottomuutta...) rajoittaa signaali aikataajuustason äärelliseen osaan.

7.1 Ajassa ja taajuudessa rajoitettu signaali?

Olkoon $\|s\|^2 < \infty$, missä $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on rajoitettu aikataajuudessa siinä mielessä, että

$$s(t) = 0 = \widehat{s}(\nu)$$

aina kun $|t| > M$ ja $|\nu| > M$; tässä $M < \infty$ on vakio. Tässä kohtaa tarvitsemme hieman kompleksianalyysia (ks. kurssi **MS-C1300 Kompleksianalyysi**). Määritellään silloin analyttinen funktio $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$h(z) := \int_{-M}^M e^{-i2\pi t \cdot z} s(t) dt.$$

Analyttisyyden vuoksi h voidaan esittää potenssisarjana

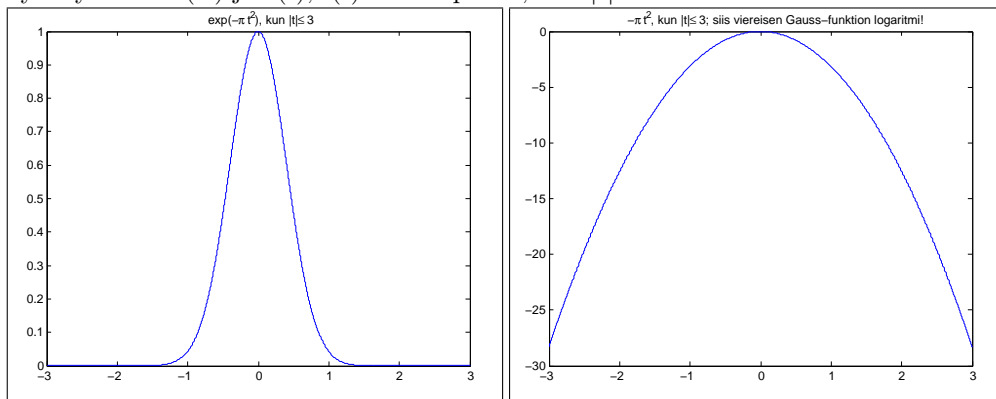
$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{(k)}(a) (z - a)^k$$

kaikilla $a \in \mathbb{C}$. Mutta jos $M < a \in \mathbb{R}$, niin $h(a) = \widehat{s}(a) = 0$ ja siten $h^{(k)}(a) = 0$ kaikilla $k \geq 0$. Tämän vuoksi $h(z) \equiv 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Toisaalta $\widehat{s}(\nu) = h(\nu) \equiv 0$ kaikilla $\nu \in \mathbb{R}$, joten $s(t) \equiv 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Johtopäätös: Ainoa aikataajuudessa rajoitettu signaali on nollasignaali!

Huomautus: Schwartz-testifunktiot $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$

(esim. Gauss-tyyppiset funktiot) ovat "melkein rajoitettuja aikataajuudessa": nyt myös $\widehat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja $s(t), \widehat{s}(t) \rightarrow 0$ nopeasti, kun $|t| \rightarrow \infty$.



7.2 Lämmönvirtaus: Fourier-analyysin historiallinen alkuperä

Oletetaan, että $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ns. *lämpöyhtälön*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u(x, t) \quad (82)$$

alkuehdolla $u(x, 0) = f(x)$, missä $\alpha > 0$ on terminen diffuusiokerroin. Tässä $u_t(x) = u(x, t)$ on "lämpötila pisteessä x hetkellä t ". Otetaan lämpöyhtälöstä puolittain Fourier-muunnos muuttujan $x \in \mathbb{R}$ suhteen, jolloin saadaan

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_t(\xi) = -(2\pi\xi)^2 \alpha \widehat{u}_t(\xi) \quad \text{ja} \quad \widehat{u}_0(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

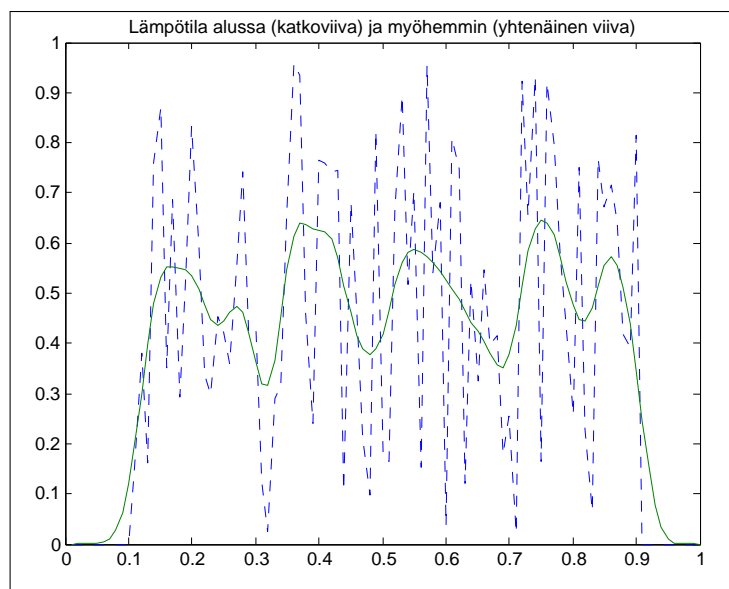
joten

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(\xi) &= e^{-(2\pi\xi)^2 \alpha t} \widehat{f}(\xi), \\ u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} e^{-(2\pi\xi)^2 \alpha t} \widehat{f}(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Fourier johti lämpöyhtälön ja päätteli sille tällaisen ratkaisukaavan jaksollisen muuttujan x tapauksessa vuonna 1807: tätä voidaan pitää Fourier-sarjojen varsinaisena syntyvuonna. Toisaalta Daniel Bernoulli ja Leonhard Euler pohtivat värähtelevien lankojen esittämistä trigonometrisina sarjoina jo vuonna 1753; ja Gauss "keksi" varhaisen FFT-algoritmin vuonna 1805.

Huomaa, että yllä u saadaan normaalijakauman ja alkudatan konvoluutiona:

$$u(x, t) = k_t * f(x), \quad \text{kun} \quad k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t \pi}} e^{-x^2/(4\alpha t)}.$$



7.3 Kertaus: miten liittyvät toisiinsa erilaiset Fourier-muunnokset?

Tarkastellaan nyt kurssilla esiteltyjen erilaisten Fourier-muunnosten yhteisiä piirteitä. Olkoon G ajanhetkien avaruus. Taajuuksien avaruus \widehat{G} on silloin duaalinen ajanhetkien avaruudelle G . Taulukoidaan käsittelemämme tapaukset:

$$\begin{aligned} (G, \widehat{G}) &= (\mathbb{R}, \mathbb{R}). & (G, \widehat{G}) &= (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}). \\ (G, \widehat{G}) &= (\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}). & (G, \widehat{G}) &= (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Nämä vastasivat seuraavia signaalien luokitteluja:

$$\begin{aligned} \textit{Analogiset jaksottomat (A0).} & & \textit{Analogiset jaksolliset (A1).} \\ \textit{Digitaaliset jaksottomat (D0).} & & \textit{Digitaaliset jaksolliset (D1).} \end{aligned}$$

Jokaisessa näistä tapauksista tarkasteltiin signaaleja $s : G \rightarrow \mathbb{C}$ ja niiden Fourier-muunnoksia $\widehat{s} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$, ja näiden välillä oli yhteys muotoa

$$\begin{aligned} \widehat{s}(\nu) &= \int_G e^{-i\langle t, \nu \rangle} s(t) dt, \\ s(t) &= \int_{\widehat{G}} e^{+i\langle t, \nu \rangle} \widehat{s}(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

Tyypillisesti Fourier-muunnoksessa “energia säilyi” eli $E(\widehat{s}) = E(s)$, missä

$$E(s) = \|s\|^2 = \int_G |s(t)|^2 dt$$

(paitsi että epäsymmetrisen DFT:n kohdalla tarvittiin korjausvakio...). Signaalien $r, s : G \rightarrow \mathbb{C}$ konvoluutio $r * s : G \rightarrow \mathbb{C}$ määriteltiin

$$r * s(t) = \int_G r(t-u) s(u) du,$$

ja DFT:n tapauksessa tämä voitiin laskea tehokkaasti FFT-algoritmilla.

Mistä Fourier-analyysissa on yleisesti kyse? Voidaan sanoa, että ajan symmetriat synnyttävät Fourier-analyysin. Täsmällisemmin: Jos “ajanhetkien” joukko G on “lokaalisti kompakti kommutatiivinen ryhmä” (engl. “locally compact commutative group”), niin “taajuuksien” joukko \widehat{G} on samantyyppinen ryhmä ja saadaan aikaan yllä esiintyvän kaltainen Fourier-koneisto. Tällainen Fourier-analyysi syntyy myös tapauksessa, jossa G on “kompakti ryhmä” — aiheesta lisää kurssilla **MS-E1220 Symmetries**.

7.3.1 Kertausongelmia ja -kysymyksiä

Etsi tieteenalaltasi esimerkkejä signaaleista

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}, & s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ s : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}, & s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}. \end{aligned}$$

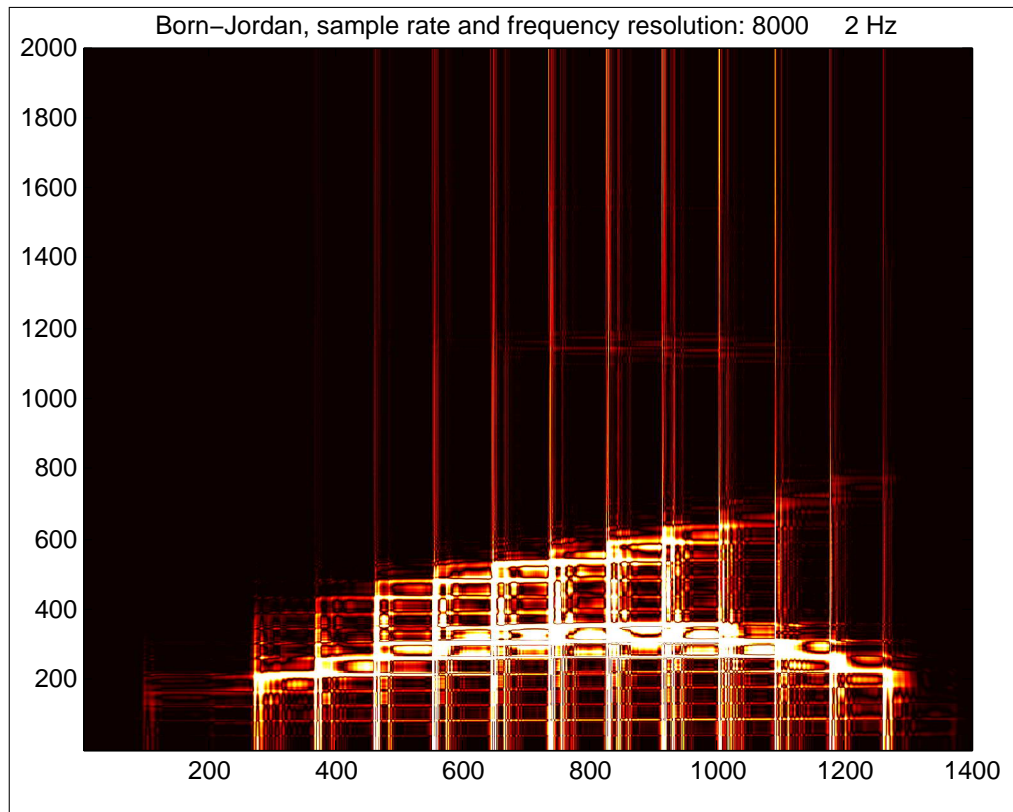
Kussakin näistä tapauksista:

- Miten Fourier-muunnos määritellään? Minkä tyyppinen signaali se on?
- Kuinka energia määritellään? Mikä on energian tulkinta?
- Miltä Fourier-käänteismuunnos näyttää?
- Miten konvoluutio määritellään? Sovellukset signaalinkäsittelyyn?

Miten kaikki nämä erilaiset Fourier-muunnokset liittyvät toisiinsa?

Miksi FFT on nopea?

Mitä aikataajuusjakaumat meille kertovat?



Kiitokset! Gustaf Gripenberg, Olli Saari, kurssin assistentit ja opiskelijat, kiitos teille kommentteistanne! Pysin jatkossakin kehittämään Fourier-analyysin kurssimateriaalia — palaute on tervetullutta:

`ville.turunen@aalto.fi`