Aalto-yliopisto

Gripenberg, Ruponen, Saari

MS-C1420 Fourier-analyysi
2. välikoe 20.2.2014

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !*
*Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

**1.** Funktion $p(t)$ Fourier-muunnos on $\hat{p}(\nu) = \dfrac{\operatorname{sinc}(\nu)^4}{1 - \frac{2}{3}\sin(\pi\nu)^2}$, missä $\operatorname{sinc}(0) = 1$ ja $\operatorname{sinc}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ kun $\nu \neq 0$. Tämä funktio on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, $p(0) = 1$ ja $p(k) = 0$ kun $k \neq 0$. Jos nyt $N > 1$ ja $p_N(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(N(t-j))$ niin mitkä ovat tämän funktion Fourier-kertoimet $\widehat{p_N}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ ja mitä hyötyä tästä funktiosta voi olla?

**2.** Signaalista $s(t) = \sin(2\pi 6t)$ otetaan näytteitä $\mathbf{q}(j) = s(j \cdot 0.4)$, $j = 0, 1, \ldots, 1999$ ja lasketaan tämän jonon Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin $j$, $0 \leq j \leq 1999$, arvoilla luvut $|\hat{q}(j)|$ ovat suurimmillaan?

**3.** Olkoon III vaimennettu distribuutio $\mathrm{III} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ (ns. Diracin kampa) missä $\delta_k$ on vaimennettu distribuutio, jonka arvo funktiolla $\psi$ on $\delta_k(\psi) = \psi(k)$. Määritä Fourier-muunnos $\widehat{\mathrm{III}}$. Perustele!

**4.** Osoita, että jos $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathbf{a}(j)| < \infty$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathbf{b}(j)| < \infty$ ja jono $\mathbf{c}$ on $\mathbf{a}$:n ja $\mathbf{b}$:n konvoluutio, eli $\mathbf{c}(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j)$ (jolloin myös pätee $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mathbf{c}(k)| < \infty$) niin jonon $\mathbf{c}$ Fourier-muunnos $\hat{\mathbf{c}}$ on $\hat{\mathbf{c}}(\nu) = \hat{\mathbf{a}}(\nu)\hat{\mathbf{b}}(\nu)$.