Aalto-yliopisto

Gripenberg, Ruponen, Saari

MS-C1420 Fourier-analyysi
2. välikoe 20.2.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1. Funktion $p(t)$ Fourier-muunnos on $\hat{p}(\nu) = \dfrac{\operatorname{sinc}(\nu)^4}{1-\frac{2}{3}\sin(\pi\nu)^2}$, missä $\operatorname{sinc}(0)=1$ ja $\operatorname{sinc}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ kun $\nu \neq 0$. Tämä funktio on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, $p(0)=1$ ja $p(k)=0$ kun $k \neq 0$. Jos nyt $N > 1$ ja $p_N(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(N(t-j))$ niin mitkä ovat tämän funktion Fourier-kertoimet $\widehat{p_N}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ ja mitä hyötyä tästä funktiosta voi olla?

Ratkaisu: Jos $q_N(t) = p(Nt)$ niin $\widehat{q_N}(\nu) = \frac{1}{N}\hat{p}\left(\frac{\nu}{N}\right)$ ja koska $p_N(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} q_N(t-j)$ niin funktion p_N Fourier-kertoimet ovat funktion q_N Fourier-muunnoksen arvot kokonaislukupisteissä, eli

$$\widehat{p_N}(k) = \frac{1}{N}\frac{\operatorname{sinc}(\frac{k}{N})^4}{1-\frac{2}{3}\sin(\pi\frac{k}{N})^2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funktio p_N voi olla hyödyllinen "interpolaatiofunktiona" kun lasketaan numeerisesti Fourier-kertoimia tasavälisten näytteiden perusteella.

---

2. Signaalista $s(t) = \sin(2\pi 6t)$ otetaan näytteitä $\mathbf{q}(j) = s(j\cdot 0.4)$, $j = 0,1,\ldots,1999$ ja lasketaan tämän jonon Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin j, $0 \le j \le 1999$, arvoilla luvut $|\hat{q}(j)|$ ovat suurimmillaan?

Ratkaisu: Koska $\sin(2\pi 6t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 6t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 6t})$ niin tämä signaali sisältää taajuudet 6 ja -6. Diskreetin Fourier-muunnoksen kannalta olennaisia ovat luvut $\operatorname{mod}(0.4\cdot 6, 1) = \operatorname{mod}(2.4,1) = 0.4$ ja $\operatorname{mod}(0.4\cdot(-6),1) = \operatorname{mod}(-2.4,1) = 0.6$. (Tässä siis $\operatorname{mod}(x,1) = y$ jos $0 \le y < 1$ ja $x = n + y$ missä $n \in \mathbb{Z}$.) Koska näytteitä on $N = 2000$ niin diskreetti Fourier-muunnos saa itseisarvoltaan suurimmat arvot kun $j \approx N\operatorname{mod}(\nu\Delta t, 1)$ eli tässä tapauksessa kun $j \approx 0.4\cdot 2000 = 800$ ja $j \approx 0.6 \cdot 2000 = 1200$.

---

3. Olkoon III vaimennettu distribuutio $\mathrm{III} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ (ns. Diracin kampa) missä δ_k on vaimennettu distribuutio, jonka arvo funktiolla ψ on $\delta_k(\psi) = \psi(k)$. Määritä Fourier-muunnos $\widehat{\mathrm{III}}$. Perustele!

Ratkaisu: Vaimennetun distribuution Fourier-muunnoksen määritelmän mukaan $\widehat{\mathrm{III}}(\psi) = \mathrm{III}(\hat{\psi})$ joten

$$\widehat{\mathrm{III}}(\psi) = \mathrm{III}(\hat{\psi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k(\hat{\psi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(k).$$

Koska ψ ja $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin Poissonin summakaavan oletukset ovat varmasti voimassa joten tämän kaavan nojalla

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k(\psi) = \mathrm{III}(\psi),$$

Näin ollen $\widehat{\text{III}} = \text{III}$.

---

4. Osoita, että jos $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathbf{a}(j)| < \infty$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathbf{b}(j)| < \infty$ ja jono $\mathbf{c}$ on $\mathbf{a}$:n ja $\mathbf{b}$:n konvoluutio, eli $\mathbf{c}(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j)$ (jolloin myös pätee $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mathbf{c}(k)| < \infty$) niin jonon $\mathbf{c}$ Fourier-muunnos $\hat{\mathbf{c}}$ on $\hat{\mathbf{c}}(\nu) = \hat{\mathbf{a}}(\nu)\hat{\mathbf{b}}(\nu)$.

Ratkaisu: Vaihtamalla summien järjestystä saadaan

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{c}}(\nu) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\nu}\mathbf{c}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\nu}\mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(k-j)\nu}\mathbf{a}(k-j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(k-j)\nu}\mathbf{a}(k-j)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) \\
&\overset{k=j+n}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n\nu}\mathbf{a}(n)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{a}}(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) \\
&= \hat{\mathbf{a}}(\nu)\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{a}}(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) = \hat{\mathbf{a}}(\nu)\hat{\mathbf{b}}(\nu).
\end{aligned}$$
