Aalto-yliopisto

Gripenberg, Ruponen, Saari

MS-C1420 Fourier-analyysi
1. välikoe 29.1.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1.

(a) Esitä signaalin $h(t) = s(4t-3)$, $t \in \mathbb{R}$ Fourier-muunnos $\hat{h}$ signaalin s Fourier-muunnoksen $\hat{s}$ avulla.

(b) Jos $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ kun $t > 0$ ja $s(t) = 0$ kun $t \le 0$ niin päteekö $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\nu)|\,\mathrm{d}\nu < \infty$ ja /tai $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu < \infty$. Perustele, mutta älä laske Fourier-muunnosta!

Ratkaisu: (a) Määritelmän nojalla ja muuttujanvaihdolla $4t - 3 = \tau$ jolloin $t = \frac{1}{4}\tau + \frac{3}{4}$ ja $\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\mathrm{d}\tau$ saadaan

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(4t-3)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{4}\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\frac{3}{4}} s(\tau)\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\frac{3}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{4}\tau} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\frac{3}{4}}}{4}\hat{s}\left(\frac{\nu}{4}\right).$$

(b) Jos $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\nu)|\,\mathrm{d}\nu < \infty$ niin $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\nu t}\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ ja integraali on t:n jatkuva funktio mikä s ei ole, joten $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\nu)|\,\mathrm{d}\nu = \infty$.

Koska $\mathrm{e}^{-\pi t^2} \le 1$ niin $|s(t)|^2 \le \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ kaikilla t ja $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t \le \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1$ joten koska Fourier-muunnos on isometria $L^2(\mathbb{R})$:ssä niin $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t \le 1 < \infty$.

---

2. Määritä funktion $s(t) = t\mathrm{e}^{-|t|}$ Fourier-muunnos käyttäen hyväksi tietoa, että funktion $h(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ Fourier-muunnos on $\hat{h}(\nu) = \frac{2}{4\pi^2\nu^2+1}$.

Ratkaisu: Annetun tuloksen mukaan

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{4\pi^2\nu^2+1}.$$

Jos nyt derivoidaan ν:n suhteen (mikä on sallittua integraalin sisäpuolella koska $\mathrm{e}^{-|t|}$ suppenee riittävän nopeasti kohti 0 kun $|t| \to \infty$) niin saadaan

$$-\mathrm{i}2\pi\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}t\mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t = -\frac{16\pi^2\nu}{(4\pi^2\nu^2+1)^2},$$

josta seuraa, että kysytty Fourier-muunnos on

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}t\mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{i}8\pi\nu}{(4\pi^2\nu^2+1)^2}.$$

---

3. Olkoon s vektori $[\mathbf{s}(0), \mathbf{s}(1), \mathbf{s}(2), \mathbf{s}(3), \mathbf{s}(4)] = [1, -3, 5, -7, 9]$ ja $\hat{\mathbf{s}}$ sen diskreetti Fourier-muunnos. Jos $\mathbf{q} = \widehat{\hat{\mathbf{s}}}$ (diskreetin Fourier-muunnoksen diskreetti Fourier-muunnos) niin määritä vektori $[\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(1), \mathbf{q}(2), \mathbf{q}(3), \mathbf{q}(4)]$ käyttämällä hyväksi diskreetin Fourier-muunnoksen käänteismuunnosta (eli älä laske s:n Fourier-muunnosta.)

Ratkaisu: Diskreetin Fourier-muunnoksen $\mathcal{F}_N$ käänteismuunnos on

$$\mathbf{s}(k) = \mathcal{F}_N^{-1}(\hat{\mathbf{s}})(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \frac{kj}{N}} \hat{\mathbf{s}}(j),$$

josta nähdään että $\mathbf{q}(k) = \mathcal{F}_N(\mathcal{F}_N(\mathbf{s}))(k) = N\mathbf{s}(-k)$ kun $k = 0, 1, \ldots N-1$. Koska vektori $\mathbf{s}$ on jatkettu jaksolliseksi jonoksi jaksolla N niin $\mathbf{s}(-k) = \mathbf{s}(N-k)$. Tässä tapauksessa $N = 5$ joten $\mathbf{s}(0) = 1$, $\mathbf{s}(-1) = 9$, $\mathbf{s}(-2) = -7$, $\mathbf{s}(-3) = 5$ ja $\mathbf{s}(-4) = -3$ ja $\mathbf{q} = [545 - 3525 - 15]$.

---

4. Olkoon $s(t) = t(1-t)$, $t \in [0,1]$ ja $s(t+1) = s(t)$ kuin $t \in \mathbb{R}$. Kun $k \geq 1$ niin s:n Fourier-kertoimet ovat $\hat{s}(k) = -\frac{1}{2\pi^2 k^2}$ ja $\hat{s}(0) = \frac{1}{4}$.

(a) Päättele (laskematta integraaleja osittaisintegroinnilla) mitä Fourier-kertoimet $\hat{s}(k)$ ovat kun $k < 0$.

(b) Laske näiden tulosten avulla $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ (tai selitä ainakin miten laskisit tämän summan jos olisit ratkaissut (a)-kohdan).

Ratkaisu: (a) Koska $s(t)$ on jaksollinen niin $s(-t) = s(1-t) = (1-t)(1-(1-t)) = t(1-t) = s(t)$ kun $t \in [-1, 0]$. Näin ollen s on parillinen funktio josta seuraa, että myös Fourier-kertoimien muodostama jono on parillinen eli $\hat{s}(-k) = \hat{s}(k)$ koska

$$\hat{s}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k(-\tau)} s(-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\tau} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \hat{s}(-k).$$

Näin ollen $\hat{s}(k) = -\frac{1}{2\pi^2 k^2}$ myös kun $k < 0$.

(b) Koska $\hat{s}(k) = -\frac{1}{2\pi^2 k^2}$, $\hat{s}(0) = \frac{1}{6}$ ja $\int_0^1 |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{s}(k)|^2$ niin

$$\int_0^1 |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{-1} |\hat{s}(k)|^2 + |\hat{s}(0)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{s}(k)|^2 = \frac{1}{36} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^4 k^4}$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Koska lisäksi

$$\int_0^1 |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2(1-t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2 - 2t^3 + t^4\right)\mathrm{d}t$$
$$= \Big/_0^1 \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{5}t^5\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

Näin ollen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 2\pi^4 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{36}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$
