

MS-C1420 Fourier-analyysi
Tentti 13.5.2014

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

1.

- (a) Esitä signaalin $h(t) = s(4t)$, $t \in \mathbb{R}$ Fourier-muunnos \hat{h} signaalin s Fourier-muunnoksen \hat{s} avulla.
- (b) Signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnoksesta tiedetään, että $\hat{s}(-\nu) = -\hat{s}(\nu)$ kaikilla $\nu \in \mathbb{R}$. Mitä voidaan tämän perusteella sanoa signaalista s ? (Voit olettaa, että $\int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)| d\nu < \infty$ ja $\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < \infty$.)

2. Jatkuva signaali $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on jaksollinen jaksolla 1. Millä ehdolla signaali $h(t) = \int_0^t s(\tau) d\tau$ on myös jaksollinen jaksolla 1 ja mikä on $\hat{h}(k)$ esitettynä s :n Fourier-kertoimien avulla kun $k \neq 0$?

3.

- (a) Funktio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on sellainen, että $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\nu)| d\nu < \infty$ ja $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{h}(j + \nu) = 1$ kaikilla ν . Osoita, että $h(0) = 1$ ja $h(k) = 0$ jos $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- (b) Mitä tarkoittaa lyhenne FFT?

4. Signaalista $s(t) = \sin(2\pi 9t)$ otetaan näytteitä $q(j) = s(j \cdot 0.4)$, $j = 0, 1, \dots, 5999$ ja lasketaan tämän jonon diskreetti Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin j , $0 \leq j \leq 5999$, arvoilla luvut $|\hat{q}(j)|$ ovat suurimmillaan?

5.

- (a) Olkoon $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (eli ψ on äärettömän monta kertaa derivoituva ja $\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k s^{(m)}(t)| < \infty$ kaikilla k ja $m \geq 0$). Osoita, että funktio $\nu \mapsto \nu \hat{\psi}(\nu)$ on funktion $t \mapsto \frac{1}{i2\pi} \psi'(t)$ Fourier-muunnos.
- (b) Olkoon $s(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Tästä funktiosta saadaan vaimennettu distribuutio $s_{\rightarrow D}$ kaavalla $s_{\rightarrow D}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} s(t) \psi(t) dt$. Määritä tämän vaimennetun distribuution $s_{\rightarrow D}$ Fourier-muunnos (a)-kohdan tuloksen avulla.