Aalto-yliopisto

Gripenberg, Saari

MS-C1420 Fourier-analyysi
Tentti ja välikokeiden uusinta 12.3.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.
Tentin tehtävät ovat 5 tehtävää tehtävistä 2, 3, 4, 5, 6, 8.
Uusintavälikokeiden tehtävät ovat
1. vk: 1–4
2. vk: 5–8

1. Funktion s Fourier-muunnos on $\hat{s}(\nu) = \mathrm{e}^{-\nu^4}$. Määritä funktioiden $g(t) = s(4t)$ ja $h(t) = s(t+4)$ Fourier-muunnokset.

Ratkaisu: Funktion g Fourier-muunos on

$$\hat{g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(4t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{4}4t} s(4t)\frac{1}{4}4\,\mathrm{d}t \overset{4t=\tau}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{4}\tau} s(\tau)\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \mathrm{e}^{-(\frac{\nu}{4})^4}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{256}\nu^4}.$$

Funktion h Fourier-muunnos on

$$\hat{h}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t+4)\,\mathrm{d}t \overset{t+4=\tau}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu(\tau-4)} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu(-4)} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 4\nu}\mathrm{e}^{-\nu^4}.$$

---

2. Funktiosta s tiedetään, että sen Fourier-munnos on

$$\hat{s}(\nu) = \begin{cases} 2, & 1 \le \nu \le 3, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritä $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t$ ja $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|\,\mathrm{d}t$.

Ratkaisu: Koska kaikilla funktioilla pätee $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu|^2\,\mathrm{d}\nu$ niin tässä tapauksessa

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_1^3 2^2\,\mathrm{d}\nu = 4 \cdot (3-1) = 8.$$

Jos $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ niin $\hat{s}$ olisi jatkuva ja koska näin ei ole asian laita niin $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|\,\mathrm{d}t = \infty$.

---

3. Diskreetti jono s on jaksollinen jaksolla 10 ja sen diskreetti Fourier-muunnos $\hat{\mathrm{s}}$ toteuttaa ehdot $\overline{\hat{\mathrm{s}}(j)} = \hat{\mathrm{s}}(10-j)$, $j = 0, 1, \ldots, 9$. Onko jono s reaalinen? Perustele ja muista että kompleksiluku z on reaalinen jos ja vain jos $\overline{z} = z$.

Ratkaisu: Käänteiskaavan nojalla pätee

$$\mathrm{s}(k)=\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{10}}\hat{\mathrm{s}}(j).$$

Näin ollen seuraa oletuksesta $\overline{\hat{\mathrm{s}}(j)}=\hat{\mathrm{s}}(10-j)$ että

$$\overline{\mathrm{s}(k)}=\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9}\overline{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{10}}}\,\overline{\hat{\mathrm{s}}(j)}=\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}2\pi kj}{10}}\hat{\mathrm{s}}(10-j)\overset{10-j=m}{=}$$

$$=\sum_{m=1}^{10}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi k(m-10)}{10}}=\frac{1}{10}\hat{\mathrm{s}}(10)+\frac{1}{10}\sum_{m=1}^{9}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi km}{10}}\hat{\mathrm{s}}(m)=\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi km}{10}}\hat{\mathrm{s}}(m)=\mathrm{s}(k),$$

koska $\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi k(-10)}{10}}=1$ ja $\hat{\mathrm{s}}(10)=\hat{\mathrm{s}}(0)$ jaksollisuuden nojalla.

---

4. Funktio s on jatkuvasti derivoituva, jaksollinen jaksolla 1 ja sen Fourier-kertoimet ovat $\hat{s}(0)=0$ ja $\hat{s}(k)=\frac{\mathrm{i}(-1)^k}{k^3}$ kun $k\neq 0$. Määritä s:n derivaatan s' Fourier-kertoimet.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan funktion s':n Fourier-kertoimet ovat

$$\widehat{s'}(k)=\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}s'(t)\,\mathrm{d}t=\Big/_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}s'(t)-\int_0^1(-\mathrm{i}2\pi k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}s(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k}s(1)-\mathrm{e}^0s(0)+\mathrm{i}2\pi k\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}s(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{i}2\pi k\hat{s}(k),$$

koska $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k}=\mathrm{e}^0=1$ ja $s(1)=s(0)$ jaksollisuuden nojalla. Koska $\hat{s}(k)=\frac{\mathrm{i}(-1)^k}{k^3}$ niin

$$\widehat{s'}(k)=\begin{cases}0, & k=0,\\ \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k^2}, & k\neq 0.\end{cases}$$

---

5. Osoita, että jos $\int_{\mathbb{R}}|g(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$ ja $h(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}g(t-j)$ kun $t\in\mathbb{R}$ niin jaksollisen funktion h Fourier-kerroin $\hat{h}(k)$ on jaksottoman funktion g Fourier-muunnoksen arvo pisteessä k.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan

$$\hat{h}(k)=\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}h(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}\sum_{j\in\mathbb{Z}}g(t-j)\,\mathrm{d}t=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}g(t-j)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{t-j=\tau}{=}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{-j}^{-j+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k(\tau+j)}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{-j}^{-j+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kj}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\tau}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\overset{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kj}=1}{=}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{-j}^{-j+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\tau}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\tau}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\hat{g}(k).$$

---

6. Signaalista $s(t) = \sin(2\pi 7t)$ otetaan näytteitä $\mathbf{q}(j) = s(j \cdot 0.6)$, $j = 0, 1, \ldots, 3999$ ja lasketaan tämän jonon Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin j, $0 \leq j \leq 3999$, arvoilla luvut $|\hat{q}(j)|$ ovat suurimmillaan?

Ratkaisu: Koska $\sin(2\pi 7t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 7t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 7t})$ niin tämä signaali sisältää taajuudet 7 ja -7. Diskreetin Fourier-muunnoksen kannalta olennaisia ovat luvut $\mathrm{mod}\,(0.6\cdot 7, 1) = \mathrm{mod}\,(4.2, 1) = 0.2$ ja $\mathrm{mod}\,(0.6 \cdot (-7), 1) = \quad \mathrm{mod}\,(-4.2, 1) = 0.8$. (Tässä siis $\mathrm{mod}\,(x, 1) = y$ jos $0 \leq y < 1$ ja $x = n + y$ missä $n \in \mathbb{Z}$.) Koska näytteitä on $N = 4000$ niin diskreetti Fourier-muunnos saa itseisarvoltaan suurimmat arvot kun $j \approx N\mathrm{mod}\,(\nu\Delta t, 1)$ eli tässä tapauksessa kun $j \approx 0.2 \cdot 4000 = 800$ ja $j \approx 0.8 \cdot 4000 = 3200$.

---

7. Oletetaan, että $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$ ja $\int_{\mathbb{R}} |w(t)| \,\mathrm{d}t^2 = 1$ ja että s:n ikkunoitu Fourier-muunnos ikkunafunktiolla w on $F(s, w)(\tau, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\overline{w(t-\tau)} \,\mathrm{d}t$. Osoita, että

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(s, w)(\tau, \nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu.$$

Ratkaisu: Koska funktio $\nu \mapsto F(s, w)(\tau, \nu)$ on funktion $t \mapsto s(t)\overline{w(t-\tau)}$ Fourier-muunnos jokaisella $\tau \in \mathbb{R}$ ja koska $\int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 \,\mathrm{d}t$ niin

$$\int_{\mathbb{R}} |F(s, w)(\tau, \nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} |s(t|\overline{w(t-\tau)}^2 \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 |w(t-\tau)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Jos nyt integroidaan τ:n suhteen ja vaihdetaan integroimisjärjestys niin tuloksena on

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(s, w)(\tau, \nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\tau &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 |w(t-\tau)|^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \int_{\mathbb{R}} |w(t-\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}t \overset{t-\tau=u}{=} \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \int_{\mathbb{R}} |w(u)|^2 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}t \\
&\overset{\int_{\mathbb{R}} |w(t)| \,\mathrm{d}t^2 = 1}{=} \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu,
\end{aligned}$$

missä taas käytettiin tulosta, jonka mukaan Fourier-muunnos on isometria joukossa $L^2(\mathbb{R})$.

---

8. Oletetaan, että $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on sellainen, että $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mathbf{a}(j)| < \infty$. Määritellään vaimennettu distribuutio $h = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a(j)\delta_j$ jolloin siis sen arvo testifunktiolla ψ on $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a(j)\psi(j)$. Määritä h:n Fourier-muunnos.

Ratkaisu: Vaimennetun distribuution Fourier-muunnoksen määritelmän nojalla $\hat{h}(\psi) = h(\hat{\psi})$ joten

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\psi) = h(\hat{\psi}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(j)\hat{\psi}(j) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(j) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu} \psi(\nu) \,\mathrm{d}\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu} \right) \psi(\nu) \,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{a}}(\nu)\psi(\nu) \,\mathrm{d}\nu = (\hat{\mathbf{a}}_{\to\mathrm{D}})(\psi).
\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että h:n Fourier-muunnos on funktion $\hat{\mathbf{a}}$ generoima distribuutio missä $\hat{a}(\nu) == \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu} \mathbf{a}(j)$.
