Aalto-yliopisto

Gripenberg

MS-C1420 Fourier-analyysi
Tentti 3.9.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1. Olkoon s (esim. jatkuva ja) jaksollinen funktio jaksolla 1 ja määrittele luvut a_n ja b_n, $n \in \mathbb{Z}$, kaavoilla

$$a_n = 2\int_0^1 \cos(2\pi nt)s(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$b_n = 2\int_0^1 \sin(2\pi nt)s(t)\,\mathrm{d}t.$$

Esitä Fourier-kertoimet $\hat{s}(n)$ lukujen a_n ja b_n avulla ja päinvastoin.

Ratkaisu:

$$\hat{s}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt}s(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(2\pi nt)s(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^1 \sin(2\pi nt)s(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}a_n - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}b_n.$$

Nyt $a_{-n} = a_n$ ja $b_{-n} = -b_n$ joten

$$\hat{s}(n) + \hat{s}(-n) = \tfrac{1}{2}a_n - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}b_n + \tfrac{1}{2}a_{-n} - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}b_{-n} = a_n,$$

eli

$$a_n = \hat{s}(n) + \hat{s}(-n).$$

Samalla tavalla saadaan

$$\hat{s}(n) - \hat{s}(-n) = \tfrac{1}{2}a_n - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}b_n - \tfrac{1}{2}a_{-n} + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}b_{-n} = -\mathrm{i}b_n,$$

eli

$$b_n = \mathrm{i}(\hat{s}(n) - \hat{s}(-n)).$$

---

2. Funktion s Fourier-muunnos on

$$\hat{s}(\nu) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\nu}\cdot\frac{1}{1+\nu}, & \nu \geq 0,\\ 0, & \nu < 0.\end{cases}$$

Onko s jatkuva? Onko $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$? Onko $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$? Perustele (ei todistuksia äläkä laske $s(t)$).

Ratkaisu: Koska

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{s}(\nu)|\,\mathrm{d}\nu = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\nu}\frac{1}{1+\nu}\,\mathrm{d}\nu < \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\nu}\,\mathrm{d}\nu = 1,$$

ja $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ niin s on jatkuva.

Jos $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ niin $\hat{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}s(t)\,\mathrm{d}t$ olisi jatkuva ja koska näin ei ole ($\lim_{\nu\to 0-}\hat{s}(\nu) = 0 \neq 1 = \lim_{\nu\to 0+}\hat{s}(\nu)$) niin ei päde $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Sen sijaan pätee $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$ koska

$$\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{s}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2\nu}\frac{1}{(1+\nu)^2}\,\mathrm{d}\nu < \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2\nu}\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}.$$

---

3. Signaalin $\mathbf{s}(j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$ diskreetti Fourier-muunnos määritellään kaavalla $\hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mj/N}\mathbf{s}(j)$. Johda kaava, jolla luvut $\mathbf{s}(j)$ voidaan esittää lukujen $\hat{\mathbf{s}}(m)$ avulla.

Ratkaisu: Diskreetin Fourier-muunnoksen määritelmän nojalla

$$\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mk/N}\hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mk/N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mj/N}\mathbf{s}(j) = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mk/N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mj/N}\right)\mathbf{s}(j).$$

Kun $j = k$ niin

$$\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mk/N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mj/N} = \sum_{m=0}^{N-1}1 = N,$$

ja kun $j \neq k$ (ja $0 \leq j, k \leq N-1$) niin geometrisen sarjan summakaavan nojalla

$$\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mk/N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mj/N} = \sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k-j}{/}Nm} = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k-j}{/}NN}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k-j}{/}N}} = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k-j}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k-j}{/}N}} = \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{k-j}{/}N}} = 0.$$

Näin ollen

$$\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mk/N}\hat{\mathbf{s}}(m) = N\mathbf{s}(k),$$

joten käänteiskaava on

$$\mathbf{s}(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mk/N}\hat{\mathbf{s}}(m).$$

---

4. Signaalista $s(t) = \cos(2\pi 7t)$ otetaan näytteitä $\mathbf{q}(j) = s(j\cdot 0.3)$, $j = 0, 1, \ldots, 2999$ ja lasketaan tämän jonon Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin j, $0 \leq j \leq 2999$, arvoilla luvut $|\hat{\mathbf{q}}(j)|$ ovat suurimmillaan?

Ratkaisu: Koska $\cos(2\pi 7t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 7t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 7t})$ niin tämä signaali sisältää taajuudet 7 ja -7. Diskreetin Fourier-muunnoksen kannalta olennaisia ovat luvut $\mathrm{mod}\,(0.3\cdot 7, 1) = \mathrm{mod}\,(2.1, 1) = 0.1$ ja $\mathrm{mod}\,(0.3\cdot(-7), 1) = \mathrm{mod}\,(-2.1, 1) = 0.9$. (Tässä siis $\mathrm{mod}\,(x, 1) = y$ jos $0 \leq y < 1$ ja $x = n + y$ missä $n \in \mathbb{Z}$.) Koska näytteitä on $N = 3000$ niin diskreetti Fourier-muunnos saa itseisarvoltaan suurimmat arvot kun $j \approx N\mathrm{mod}\,(\nu\Delta t, 1)$ eli tässä tapauksessa kun $j \approx 0.1\cdot 3000 = 300$ ja $j \approx 0.9\cdot 3000 = 2700$.

---

5. Signaali $s(t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$ määrittää vaimennetun distribuution. Mikä on tämän vaimennetun distribuution Fourier-muunnos? Perustele!

Ratkaisu: Kyseessä oleva vaimennettu distribuutio on $s_{\to\mathrm{D}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, missä $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Määritelmän mukaan pätee silloin

$$\widehat{s_{\to\mathrm{D}}}(\varphi) = s_{\to\mathrm{D}}(\hat{\varphi}) = 2\int_{\mathbb{R}}\hat{\varphi}(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla pätee $\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \varphi(0)$ joten $\widehat{s_{\to\mathrm{D}}}(\varphi) = 2\varphi(0)$ eli $\widehat{s_{\to\mathrm{D}}} = 2\delta_0$.