Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi — Gripenberg, Ruponen, Saari
Harjoitus 6
12–14.2.2014, viikko 7

P1. Olkoon $s(t) = \mathrm{e}^{-\epsilon t^2}\cos(4\pi t)$. Laske tämän funktion Fourier-muunnos $\hat{s}(\nu)$ ja piirrä sen kuvaaja kun ϵ on "pieni".

Vihje: Kirjoita $\cos(4\pi t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi t})$ *ja* $\mathrm{e}^{-\epsilon t^2} = h_0(\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}t)$ *missä* $h_0(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ *ja muista, että* $\widehat{h_0} = h_0$.

Huom! *Tässä lasketaan signaalin* $\cos(4\pi t)$ *ikkunoitu Fourier-muunnos ikkuna-funktiolla* $\mathrm{e}^{-\epsilon t^2}$ *kun* $\tau = 0$.

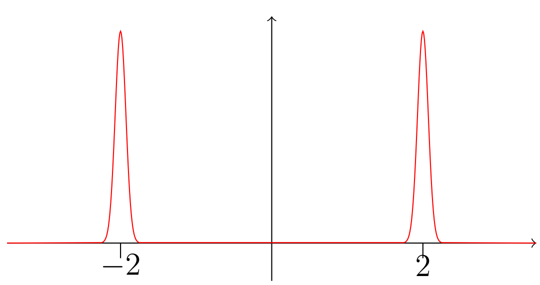
Ratkaisu: Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\hat{s}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{-\epsilon t^2}\cos(4\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{-\epsilon t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi 2t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{-\epsilon t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu-2)t}\mathrm{e}^{-\epsilon t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\nu+2)t}\mathrm{e}^{-\epsilon t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(C_{\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}}h_0)(\nu-2) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(C_{\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}}h_0)(\nu+2),\end{aligned}$$

missä $h_0(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ jolloin $(C_{\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}}h_0)(t) = h_0(\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}t) = \mathrm{e}^{-\epsilon t^2}$. Koska $\widehat{h_0} = h_0$ niin

$$\hat{s}(\nu) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{\epsilon}(\nu-2)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{\epsilon}(\nu+2)^2}.$$

Kun $\epsilon = 0.1$ Fourier-muunnoksen kuvaaja näyttää tällaiselta:



Kun $\epsilon \to 0$ niin raja-arvona saadaan $\frac{1}{2}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_2$.

P2. Jos $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on sellainen, että $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathbf{a}(j)| < \infty$ niin tämän jonon Fourier-muunnos on määritelmän mukaan $\hat{a}(\nu) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{a}(j)$. Osoita, että jos $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathbf{a}(j)| < \infty$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathbf{b}(j)| < \infty$ ja jono $\mathbf{c}$ on $\mathbf{a}$:n ja $\mathbf{b}$:n konvoluutio, eli $\mathbf{c}(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j)$ (jolloin myös pätee $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mathbf{c}(k)| < \infty$) niin $\hat{\mathbf{c}}(\nu) = \hat{\mathbf{a}}(\nu)\hat{\mathbf{b}}(\nu)$.

Ratkaisu: Vaihtamalla summien järjestystä saadaan

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{c}}(\nu) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\nu}\mathbf{c}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\nu}\mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(k-j)\nu}\mathbf{a}(k-j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(k-j)\nu}\mathbf{a}(k-j)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) \\
&\overset{k=j+n}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n\nu}\mathbf{a}(n)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{a}}(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) \\
&= \hat{\mathbf{a}}(\nu)\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{a}}(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{b}(j) = \hat{\mathbf{a}}(\nu)\hat{\mathbf{b}}(\nu).
\end{aligned}
$$

P3. Oletetaan, että $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on sellainen, että $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mathbf{a}(j)| < \infty$ jolloin $\hat{a}(\nu) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\mathbf{a}(j)$. Määritellään vaimennettu distribuutio $h = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a(j)\delta_j$ jolloin siis sen arvo testifunktiolla ψ on $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a(j)\psi(j)$. Osoita, että h:n Fourier-muunnos on funktion $\hat{a}$ generoima distribuutio (eli se "on" $\hat{a}$) eli $\hat{h}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(\nu)\psi(\nu)\,\mathrm{d}\nu$.

Vihje: Käytä vaimennetun distribuution Fourier-muunnoksen ja tavallisen integroituvan funktion muunnoksen määritelmiä!

Ratkaisu: Vaimennetun distribuution Fourier-muunnoksen määritelmän nojalla $\hat{h}(\psi) = h(\hat{\psi})$ joten

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(\psi) = h(\hat{\psi}) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(j)\hat{\psi}(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(j)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\psi(\nu)\,\mathrm{d}\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j\nu}\right)\psi(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{a}}(\nu)\psi(\nu)\,\mathrm{d}\nu = (\hat{\mathbf{a}}_{\to\mathrm{D}})(\psi).
\end{aligned}
$$

P4. Olkoon $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ funktio jolle pätee $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$ ja joka toteuttaa yhtälön

$$\varphi(t) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k)\varphi(2t-k),$$

missä $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k\alpha(k)| < \infty$ ja $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k) = 1$.

(a) Osoita, että $\hat{\varphi}(\nu) = \hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2}\right)$ missä siis $\hat{\alpha}(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\nu}\alpha(k)$ on jonon α Fourier-muunnos.

(b) Esitä $\hat{\varphi}$ Fourier-muunnos funktion $\hat{\alpha}$ avulla (mutta suppenemistodistuksia ei tarvita, oletukset $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k\alpha(k)| < \infty$ ja $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k) = 1$ takaavat että kaikki menee hyvin).

Ratkaisu: Lasketaan Fourier-muunnokset jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k)\varphi(2t-k)\,\mathrm{d}t = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\frac{k}{2}}\alpha(k)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu(t-\frac{k}{2})}\varphi(2t-k)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{2}k}\alpha(k)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{2}(2t-k)}\varphi(2t-k)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{2t-k=\tau}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{2}k}\alpha(k)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{2}\tau}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2}\right).\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\nu) = \hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{2}\right) = \hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{2}\right)\hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{4}\right) = \hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{2}\right)\hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{4}\right)\hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{8}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\nu}{8}\right) \\ = \ldots \prod_{j=1}^{\infty}\hat{\alpha}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\end{aligned}$$

koska $\lim_{k\to\infty}\hat{\varphi}(\frac{\nu}{2^k}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

P5. Olkoon $\mathbf{s}(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ diskreettikainen **reaalinen** signaali, jonka diskreetti Fourier-muunnos on $\hat{\mathbf{s}} = \mathcal{F}_N(\mathbf{s})$.

(a) Osoita, että $\hat{\mathbf{s}}(-m) = \overline{\hat{\mathbf{s}}(m)}$ kun $k = 1, \ldots, N-1$.

(b) Oletetaan, että $\hat{\mathbf{s}}(m) = 0$ kun $M \leq m \leq \frac{N}{2}$ missä $0 < M \leq \frac{N}{2}$, muodostetaan jono $\mathbf{a}(m) = \hat{\mathbf{s}}(m)$ kun $k = 0, 1, \ldots, M-1$ ja $\mathbf{a}(m) = 0$ kun $m = M, M+1, \ldots, N-1$ ja lasketaan jono $\mathbf{b} = \mathcal{F}_N^{-1}(\mathbf{a})$. Miten signaali $\mathbf{s}$ voidaan rekonstruoida signaalin $\mathbf{b}$ ja luvun $\hat{\mathbf{s}}(0)$ avulla (laskematta Fourier-muunnoksia)?

Vihje: Oletuksen $\hat{\mathbf{s}}(m) = 0$ kun $M \leq m \leq \frac{N}{2}$ takia voidaan $\hat{\mathbf{s}}$:n käänteismuunnos kirjoittaa muodossa $s(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=-M+1}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\hat{\mathbf{s}}(m)$.

Vastaus: $2\mathrm{Re}\,(\mathbf{b}(k)) - \frac{1}{N}\hat{\mathbf{s}}(0)$

Ratkaisu: (a) Määritelmän mukaan ja koska $\overline{\mathbf{s}(k)} = \mathbf{s}(k)$ niin

$$\hat{\mathbf{s}}(-m) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{(-m)k}{N}}\mathbf{s}(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\mathbf{s}(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}}\,\overline{\mathbf{s}(k)}$$

$$= \overline{\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\mathbf{s}(k)} = \overline{\hat{\mathbf{s}}(m)}.$$

(b) Vihjeen mukaisesti kirjoitetaan

$$s(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=-M+1}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\hat{\mathbf{s}}(m) = \frac{1}{N}\hat{\mathbf{s}}(0) + \frac{1}{N}\sum_{m=-M+1}^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\hat{\mathbf{s}}(m) + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\hat{\mathbf{s}}(m)$$

$$= \frac{1}{N}\hat{\mathbf{s}}(0) + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{(-m)k}{N}}\hat{\mathbf{s}}(-m) + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\hat{\mathbf{s}}(m).$$

Koska $\hat{\mathbf{s}}(-m) = \overline{\hat{\mathbf{s}}(m)}$ (a)-kohdan nojalla niin

$$s(k) = \frac{1}{N}\hat{\mathbf{s}}(0) + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\hat{\mathbf{s}}(m) + \overline{\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\hat{\mathbf{s}}(m)}$$

$$= \frac{1}{N}\hat{\mathbf{s}}(0) + 2\mathrm{Re}\,\left(\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{mk}{N}}\hat{\mathbf{s}}(m)\right) = 2\mathrm{Re}\,(\mathbf{b}(k)) - \frac{1}{N}\hat{\mathbf{s}}(0).$$

koska $\hat{\mathbf{s}}(0)$ on reaalinen.
