Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi — Gripenberg, Ruponen, Saari
Harjoitus 5
5-7.2.2014, viikko 6

P1. Osoita, että vaimennetun distribuution $\text{III} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ Fourier-muunnos on III (eli se on Fourier-munnoksen ominaisvektori ominaisarvolla 1). Tässä δ_k on vaimennettu distribuutio, jonka arvo funktiolla ψ on $\delta_k(\psi) = \psi(k)$.

Vihje: Käytä Poissonin summakaavaa.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan

$$\widehat{\text{III}}(\psi) = \text{III}(\hat{\psi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k(\hat{\psi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(k).$$

Koska ψ ja $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin Poissonin summakaavan oletukset ovat varmasti voimassa joten tämän kaavan nojalla

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k(\psi) = \text{III}(\psi),$$

ja väite seuraa.

P2. Funktio $s(t) = t\cos(2\pi t)$ määrää vaimennetun distribuution $s_{\to\mathrm{D}}$ siten, että $s_{\to\mathrm{D}}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} t\cos(2\pi t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$. Määritä tämän distribuution $s_{\to\mathrm{D}}$:n (eli s:n) Fourier-muunnos.

Vihje: Muista miten $\widehat{\psi'}$ esitetään $\hat{\psi}$:n avulla.

Vastaus: $\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\delta'_1 + \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\delta'_{-1}$

Ratkaisu: Määritelmän mukaan

$$\mathcal{F}(s_{\to\mathrm{D}})(\psi) = s_{\to\mathrm{D}}(\hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} t\cos(2\pi t)\hat{\psi}(t)\,\mathrm{d}t, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Fourier-muunnoksen derivoimissääntöjen mukaan

$$t\hat{\psi}(t) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\widehat{\psi'}(t).$$

Lisäksi $\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t}$ joten Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla pätee

$$\mathcal{F}(s_{\to\mathrm{D}})(\psi) = \frac{1}{\mathrm{i}4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t}\widehat{\psi'}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{i}4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t}\widehat{\psi'}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}4\pi}\psi'(1) + \frac{1}{\mathrm{i}4\pi}\psi'(-1).$$

Koska $\delta'_T(\psi) = -\psi'(T)$ ja $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ (distribuution derivaatta määritellään kaavalla $h'(\psi) = -h(\psi')$ koska $\int_{\mathbb{R}} h'(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} h(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t$) niin voimme myös kirjoittaa

$$\mathcal{F}(s_{\to\mathrm{D}}) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\delta'_1 + \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\delta'_{-1}.$$

P3. Osoita, että jos $s \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ on sellainen, että $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{s}(\nu - j) = 1$ kaikilla ν jos ja vain jos $s(0) = 1$ ja $s(k) = 0$ kun $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Ratkaisu: Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla

$$s(k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\nu}\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

eli $s(k) = \widehat{\hat{s}}(-k)$. Jos nyt määrittelemme $g(\nu) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{s}(\nu - j)$ niin jaksollistamista koskevien tulosten perusteella pätee, että g:n Fourier-kertoimet ovat $\hat{s}$:n Fourier-muunnoksen arvot kokonaislukupisteissä, eli

$$\hat{g}(k) = \widehat{\hat{s}}(k) = s(-k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funktio g on jaksollinen ja ainoa funktio jonka Fourier-kertoimet ovat $\hat{g}(0) = 1$ ja $\hat{g}(k) = 0$ kun $k \neq 0$ on funktio $g(\nu) = 1$ ja väite seuraa.

P4. Olkoon

$$T_N(t) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{|k|<\frac{N}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}, & \text{jos } N \text{ on pariton,} \\ \frac{1}{N}\left(\sum_{|k|<\frac{N}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{N}{2}t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{N}{2}t}\right), & \text{jos } N \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

(a) Määritä funktion T_N Fourier-kertoimet.
(b) Osoita, että $T_N(\frac{j}{N}) = 1$ jos $\mathrm{mod}\,(j, N) = 0$ ja 0 muuten.
(c) Minkä funktion "jaksollistus" T_N on eli mikä on se funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolle pätee $T_N(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h(t-j)$?

Huom! *(b)-kohdan nojalla pätee että jos s on jaksollinen funktio ja $g(t) = \sum_{j=0}^{N-1} s(\frac{j}{N})T_N(t - \frac{j}{N})$ niin $g(\frac{j}{N}) = s(\frac{j}{N})$ kaikilla j eli kyse on ns. trigonometrisestä interpolaatiosta ja lisäksi voidaan osoittaa, että $|g(t) - s(t)| \leq 2\sum_{|k|>N/2}|\hat{s}(k)|$ jos N on pariton ja $|g(t) - s(t)| \leq |\hat{s}(-\frac{N}{2})| + |\hat{s}(\frac{N}{2})| + 2\sum_{|k|>N/2}|\hat{s}(k)|$ jos N on parilllinen.*

Ratkaisu: (a) Koska T_N on annettu funktioiden $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k}$ avulla saadaan Fourier-kertoimiksi

$$\widehat{T_N}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & |k| < \frac{N}{2}, \\ \frac{1}{2N}, & |k| = \frac{N}{2}, \\ 0, & |k| > \frac{N}{2}. \end{cases}$$

(b) Koska $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t}$ on jaksollinen jaksolla 1 niin $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{kj}{N}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{(N-k)j}{N}}$ josta seuraa, että kun N on pariton niin

$$T_N\left(\frac{j}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{kj}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{kj}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{kj}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{(N-k)j}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{kj}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{kj}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{kj}{N}}.$$

Kun N on parillinen saadaan sama tulos koska $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{N}{2}\cdot\frac{j}{N}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{N}{2}\cdot\frac{j}{N}}$, ja väite seuraa koska jos $\mathbf{q}(j) = 1$ kaikilla j niin $\mathcal{F}_N(\mathbf{q})(j) = N$ kun $\mathrm{mod}\,(j, N) = 0$ ja 0 muuten.

(c) Funktion T_N:n Fourier-kertoimet voidaan esittää muodossa $\widehat{T_N}(k) = \frac{1}{N} a\left(\frac{k}{N}\right)$ missä

$$a(\nu) = \begin{cases} 1, & |\nu| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & |\nu| = \frac{1}{2}, \\ 0, & |\nu| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nyt $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}\,) = a$ missä sinc $(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ kun $t \neq 0$ ja sinc $(0) = 1$ joten funktion sinc (Nt) Fourier-muunnos on $\frac{1}{N} a(\frac{\nu}{N})$. Tästä päätellään jaksollistamista koskevien tulosten perusteella, että $h(t) = \mathrm{sinc}\,(NT)$ ja $T_N(t) = \lim_{M\to\infty} \sum_{j=-M}^{M} \mathrm{sinc}\,(N(t-j))$.

P5. Olkoon $\mathbf{h} : \mathbf{Z} \to \mathbb{C}$ jaksollinen jaksolla $N > 1$. Nyt voidaan laskea jonon $\mathbf{h}$ diskreetti Fourier-muunnos $\hat{\mathbf{h}} = \mathcal{F}_N(\mathbf{h})$ mutta toisaalta voidaan laskea vaimennetun distribuution $q = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{h}(k)\delta_{k\Delta t}$ Fourier-muunnos $\hat{q}$ (missä Δt on jokin positiivinen luku). Miten $\hat{\mathbf{h}}$ ja $\hat{q}$ liittyvät toisiinsa?

Vastaus: $\hat{q} = \Delta\nu \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{h}}(m)\delta_{m\Delta\nu}$

Ratkaisu: Olkoon $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mielivaltainen testifunktio. Määritelmän mukaan

$$\hat{q}(\psi) = q(\hat{\psi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{h}(k)\delta_{k\Delta t}(\hat{\psi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{h}(k)\hat{\psi}(k\Delta t).$$

Koska $\mathbf{h}$ on jaksollinen voidaan kirjoittaa

$$\hat{q}(\psi) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathbf{h}(j+mN)\hat{\psi}\big((j+mN)\Delta t\big) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}(j) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}\big((j+mN)\Delta t\big).$$

Koska funktio $\nu \mapsto \hat{\psi}(a+\nu b)$ on funktion $t \mapsto \frac{1}{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi a t/b}\psi(\frac{t}{b})$ Fourier-muunnos niin Poissonin summakaavan nojalla

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}\big((j+mN)\Delta t\big) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{N\Delta t}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi jm}{N}} \psi\left(\frac{m}{N\Delta t}\right).$$

Jos nyt merkitään $\Delta\nu = \frac{1}{N\Delta t}$ niin saadaan

$$\begin{aligned} \hat{q}(\psi) = \Delta\nu \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}(j) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi jm}{N}} \psi\left(\frac{m}{N\Delta t}\right) &= \Delta\nu \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}(j)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi jm}{N}}\right) \psi(m\Delta\nu) \\ &= \Delta\nu \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{h}}(m)\psi(m\Delta\nu) = \Delta\nu \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{h}}(m)\delta_{m\Delta\nu}(\psi), \end{aligned}$$

josta voimme päätellä, että

$$\hat{q} = \Delta\nu \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{h}}(m)\delta_{m\Delta\nu}.$$

Tässäkin tuloksessa esiintyy tuttu kaava

$$N \cdot \Delta t \cdot \Delta\nu = 1.$$
