Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi
Harjoitus 4
29–31.1.2014, viikko 5

Gripenberg, Ruponen, Saari

P1. Olkoon $N > 1$ ja

$$p_N(t) = \max\{0, 1 - N|t|\}, \quad |t| \le \frac{1}{2},$$
$$p_N(t+1) = p_N(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Määritä tämän funktion Fourier-kertoimet käyttämällä hyväksi tietoa, että funktion $p(t) = \max\{0, 1 - |t|\}$ Fourier-muunnos on $\hat{p}(\nu) = \text{sinc}\,(\nu)^2 = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$ ja että $p_N(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(N(t-j))$.

Vastaus: $\frac{1}{N}\text{sinc}\,(\frac{k}{N})^2$.

Ratkaisu: Jos $q_N(t) = p(Nt)$ niin $\widehat{q_N}(\nu) = \frac{1}{N}\hat{p}(\frac{\nu}{N}) = \frac{1}{N}\text{sinc}\,(\frac{\nu}{N})^2$. Koska p_N on muodostettu funktiosta q_N jaksollistamalla niin $\widehat{p_N}(k) = \widehat{q_N}(k)$ kun $k \in \mathbb{Z}$.

P2. Osoita, että jos $t \in \mathbb{R}$ ja

$$h(\nu) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\nu}, \quad \nu \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$
$$h(\nu + 1) = h(\nu), \quad \nu \in \mathbb{R},$$

niin tämän jaksollisen funktion Fourier-kertoimet ovat

$$\hat{h}(k) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)} & \text{jos } t \ne k, \\ 1 & \text{jos } t = k. \end{cases}$$

Ratkaisu: Olkoon $t \ne k$. Määritelmän mukaan (missä siis nyt valitaan integroimisväliksi $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ koska se sopii paremmin yhteen funktion määritelmän kanssa)

$$\hat{h}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\nu}\,\mathrm{d}\nu = \Big/_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\mathrm{i}2\pi(t-k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(t-k)\nu} =$$
$$\frac{1}{\pi(t-k)}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(t-k)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(t-k)}\right) = \frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}.$$

Jos nyt $t = k$ niin

$$\hat{h}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\nu}\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}\nu = 1.$$

P3. Osoita, että jos $s \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \geq \frac{1}{2}$ ja

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \overline{\hat{s}(\nu)}, \quad \nu \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \\ g\left(\nu + 1\right) &= g(\nu), \quad s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

niin

$$\overline{\hat{g}(k)} = s(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ratkaisu: Koska $s \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\hat{s}$ on jatkuva ja koska $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \geq \frac{1}{2}$ niin $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ ja Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla

$$\overline{\hat{g}(k)} = \overline{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\nu} \overline{\hat{s}(\nu)} \, \mathrm{d}\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k\nu} \hat{s}(\nu) \, \mathrm{d}\nu = s(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

P4. Osoita, että jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \geq \frac{1}{2}$ niin

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k) \frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}.$$

Huom! *Tämä on eräs versio ns. Whittaker-Shannonin kaavasta.*
Vihje: Käytä tehtävien P2 ja P3 tuloksia ja muista, että koska Fourier-muunnos on isometria: $L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *niin* $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(\nu)\overline{g}(\nu) \, \mathrm{d}\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k)\overline{\hat{g}(k)}$.

Ratkaisu: Ensin todetaan, että koska $s \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\hat{s}$ on rajoitettu ja koska $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \geq \frac{1}{2}$ niin $\hat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ ja jos g määritellään kaavalla

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \overline{\hat{s}(\nu)}, \quad \nu \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \\ g\left(\nu + 1\right) &= g(\nu), \quad \nu \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

niin $g \in L^2(\mathbb{T})$. Jos nyt määritellään h kaavalla

$$\begin{aligned} h(\nu) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\nu}, \quad \nu \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \\ h\left(\nu + 1\right) &= h(\nu), \quad \nu \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

niin aikaisempien tulosten perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \overline{\hat{g}(k)} &= s(k), \\ \hat{h}(k) &= \frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}. \end{aligned}$$

Koska Fourier-muunnos on isometria: $L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ niin $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(\nu)\overline{g}(\nu) \, \mathrm{d}\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k)\overline{\hat{g}(k)}$ eli

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\nu} \hat{s}(\nu) \, \mathrm{d}\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k) \frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-n)}.$$

Koska $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \geq \frac{1}{2}$ niin käänteismuunnoksen kaavan nojalla

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\nu} \hat{s}(\nu) \, \mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\nu} \hat{s}(\nu) \, \mathrm{d}\nu = s(t),$$

ja väite seuraa.

P5. Seuraava esimerkki osoittaa etteivät oletukset, että $s \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |s(t+k)| < \infty$ kaikilla t ja että $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{s}(k)| < \infty$ riitä takaamaan että Poissonin summakaava $\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)$ olisi voimassa.

(a) Määritellään
$$h_j(t) = \max\big\{\min\{1, jt, j(1-t)\}, 0\big\}.$$
Piirrä funktioden h_2 ja h_{20} kuvaajat.

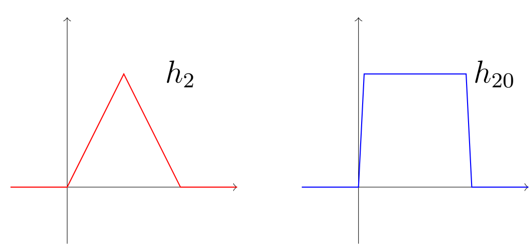
(b) Olkoon
$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{jos } t < 0, \\ h_{j+1}(t-j) - h_j(t-j), & \text{jos } t \in [j, j+1), j \geq 0. \end{cases}$$
Laske $g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s(t+j)$.

(c) Koska funktiot h_j ovat jatkuvia ja 0 välin $(0,1)$ ulkopuolella niin myös s on jatkuva, mutta laske $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\,\mathrm{d}t$.

(d) Laske $\hat{s}(k)$ kun $k \in \mathbb{Z}$ käyttäen hyväksi funktioden $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}$ jaksollisuutta ja (b)-kohdan tulosta.

(e) Laske $\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(k)$ ja $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)$.

Ratkaisu: (a)



(b) Jos $t \in [0,1)$ niin $s(t+j) = 0$ kun $j < 0$ joten
$$\sum_{j=-\infty}^{n} s(t+j) = \sum_{j=0}^{n} \big(h_{j+1}(t) - h_j(t)\big) = h_{n+1}(t) - h_0(t) \to g(t) \quad \text{kun } n \to \infty,$$
josta seuraa, että
$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } t \in (0,1) \\ 0, & \text{jos } t = 0. \end{cases}$$
Lisäksi g on jaksollinen jaksolla 1 joten $g(t) = 1$ kun $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ja $g(t) = 0$ kun $t \in \mathbb{Z}$.

(c) Koska $h_{j+1}(t) \geq h_j(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ niin
$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} |h_{j+1}(t-j) - h_j(t-j)|\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 (h_{j+1}(t) - h_j(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} (h_{j+1}(t) - h_j(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1.$$

(d) Koska $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}$ on jaksollinen jaksolla 1 niin

$$\hat{s}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{j}^{j+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k(t-j)} \big(h_{j+1}(t-j) - h_j(t-j)\big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} \sum_{j=0}^{\infty} \big(h_{j+1}(t) - h_j(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} 1\,\mathrm{d}t,$$

josta nähdään, että $\hat{s}(0) = 1$ ja $\hat{s}(k) = 0$ jos $k \neq 0$.
(e) Edellä johdettujen tulosten perusteella pätee $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k) = 1$ mutta koska $s(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ niin $\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(k) = 0$.
