Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi | Gripenberg, Ruponen, Saari
Harjoitus 3
22–24.1.2014, viikko 4

P1. Osoita, että jos $\hat{\mathbf{g}}$ ja $\hat{\mathbf{h}}$ ovat N-jaksollisten jonojen $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{h}$ diskreetit Fourier-muunnokset, niin

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{g}(m)\overline{\mathbf{h}(m)} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{\mathbf{g}}(m)\overline{\hat{\mathbf{h}}(m)}.$$

Ratkaisu: Diskreetin Fourier-muunnoksen määritelmän nojalla saadaan

$$\sum_{m=0}^{N-1} \hat{\mathbf{g}}(m)\overline{\hat{\mathbf{h}}(m)} = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{N}}\mathbf{g}(j)\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi mk}{N}}\overline{\mathbf{h}(k)}$$

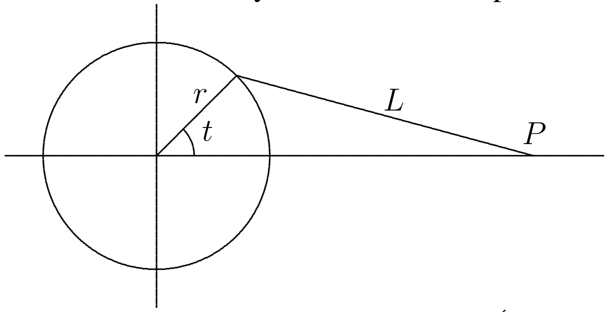
$$= \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{g}(j)\overline{\mathbf{h}(k)}\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi m(k-j)}{N}}.$$

Koska

$$\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi m(k-j)}{N}} = \begin{cases} N, & \text{jos } j = k,\\ 0, & \text{muuten,}\end{cases}$$

(kun $0 \le j, k \le N-1$) niin saadaan haluttu väite.

P2. Kuva esittää yksinkertaista kampimekanismia (esim. polttomoottorissa).



Pisteen P x-koordinaatti on $x(t) = r\left(\cos(t) + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2\sin(t)^2}\right)$ missä $\lambda = \frac{r}{L}$. Laske funktion $x(t)$ Fourier-kertoimien likarvoja käyttämällä approksimaatiota $\sqrt{1-z} \approx 1 - \frac{z}{2}$ ja kaavaa $\sin(t)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$.

Huom! *Sinun ei tarvitse laskea yhtään intgeraalia!*

Vastaus: $\hat{x}(\pm 2) \approx \frac{r^2}{8L}$, $\hat{x}(\pm 1) \approx \frac{r}{2}$, $\hat{x}(0) \approx L - \frac{r^2}{4L}$

Ratkaisu: Annetun approksimaation avulla saadaan

$$x(t) \approx r\cos(t) + L - \frac{r^2}{2L}\sin(t)^2.$$

Koska $\sin(t)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$ ja $\cos(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$ niin saadaan myös

$$
\begin{aligned}
x(t) &\approx r\cos(t) + L - \frac{r^2}{4L} + \frac{r^2}{4L}\cos(2t) \\
&= \frac{r^2}{8L}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2t} + \frac{r}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \left(L - \frac{r^2}{4L}\right) + \frac{r}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \frac{r^2}{8L}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2t}.
\end{aligned}
$$

Koska tämä on Fourier-sarja, nähdään, että Fourier-kertoimet ovat

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(-2) &\approx \frac{r^2}{8L}, \\
\hat{x}(-1) &\approx \frac{r}{2}, \\
\hat{x}(0) &\approx L - \frac{r^2}{4L}, \\
\hat{x}(1) &\approx \frac{r}{2}, \\
\hat{x}(2) &\approx \frac{r^2}{8L}, \\
\hat{x}(n) &\approx 0, \quad |n| \geq 2.
\end{aligned}
$$

Tämä approksimaatio on parempi mitä pienempi $\frac{r}{L}$ on ja jos $\frac{r}{L}$ on pieni niin pätee myös $\hat{x}(2) \ll \hat{x}(1)$.

P3. Olkoon f esim. jatkuvasti derivoituva ja jaksollinen jaksolla T. Osoita, että

$$
f(t) = \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right),
$$

missä

$$
a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t
$$

Voit olettaa tunnetuksi, että $f(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}} \hat{f}(n)$ missä $\hat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ratkaisu: Koska $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ niin $\hat{f}(n) = \frac{1}{2}a_n - \mathrm{i}\frac{1}{2}b_n$ (missä siis a_n ja b_n nyt määritellään kaikilla $n \in \mathbb{Z}$). Koska oletetaan, että f on jatkuvasti derivoituva niin tiedetään, että Fourier-sarja suppenee, ja koska $a_{-n} = a_n$ ja $b_{-n} = -b_n$ (erikoisesti $b_0 = 0$) niin saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}} \hat{f}(n) &= \sum_{n=-N}^{-1} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}} \hat{f}(n) + \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}} \hat{f}(n) \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{N} \Big(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}} \hat{f}(n) + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi(-n)t}{T}} \hat{f}(-n) \Big) \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{N} \left(\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right) \left(\tfrac{1}{2}a_n - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}b_n\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N} \left(\cos\left(\frac{2\pi(-n)t}{T}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi(-n)t}{T}\right) \right) \left(\tfrac{1}{2}a_{-n} - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}b_{-n}\right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right).
\end{aligned}$$

Väite seuraa, kun otetaan raja-arvo kun $N \to \infty$.

P4. Olkoon $s(t) = \frac{1}{2} - t$, $t \in (0,1)$. Laske funktion s Fourier-kertoimet ja niiden avulla summa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, käyttäen hyväksi tietoa, että Fourier-muunnos on isometria : $L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ eli $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{s}(n)|^2 = \int_0^1 |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t$.

Vastaus: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ratkaisu: Kun $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\hat{s}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt}(\tfrac{1}{2} - t)\,\mathrm{d}t &= \Big/_0^1 \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt}(\tfrac{1}{2} - t) \\
&\quad - \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{i}2\pi n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi n}.
\end{aligned}$$

Kun $n = 0$ saadaan

$$\hat{s}(0) = \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - t)\,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 (-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2} - t)^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0.$$

Nyt

$$\int_0^1 |s(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - t)^2 \,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \left(-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2} - t)^3\right) = \frac{1}{12}$$

ja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{s}(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Koska $\int_0^1 |s(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{s}(n)|^2$ saadaan nyt

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

P5. Jos $\mathrm{s}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ on jaksollinen diskreetti signaali jaksolla N niin voidaan laskea sen diskreetti Fourier-muunnos $\mathcal{F}_N(\mathrm{s})$. Mutta tämä signaali on myös jaksollinen jaksolla $2N$ jolloin siis voidaan myös laskea $\mathcal{F}_{2N}(\mathrm{s})$. Mikä on yhteys näiden muunnosten $\mathcal{F}_N(\mathrm{s})$ ja $\mathcal{F}_{2N}(\mathrm{s})$ välillä? Perustele jollain muullakin tavalla kuin valitsemalla mielivaltainen vektori `x` ja laskemalla sekä `fft(x)` että `fft([x,x])`, mikä siis on erinomainen tapa selvittää mitä vastauksen pitää olla.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan

$$\mathcal{F}_N(\mathrm{s})(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{N}} \mathrm{s}(j),$$

ja

$$\mathcal{F}_{2N}(\mathrm{s})(m) = \sum_{j=0}^{2N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{2N}} \mathrm{s}(j),$$

Jos nyt jälkimmäiseen kaavaan sijoitetaan $m = 2k$ niin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{2N}(\mathrm{s})(m) &= \sum_{j=0}^{2N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi 2kj}{2N}} \mathrm{s}(j) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{N}} \mathrm{s}(j) + \sum_{j=N}^{2N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{N}} \mathrm{s}(j) \\
&= \mathcal{F}_N(\mathrm{s})(k) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{N}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kN}{N}} \mathrm{s}(j+N) = 2\mathcal{F}_N(\mathrm{s})(k),
\end{aligned}$$

koska $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kN}{N}} = 1$ ja $\mathrm{s}(j+N) = \mathrm{s}(j)$.

Kun $m = 2k+1$ on pariton saadaan samanlaisella laskulla

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{2N}(\mathrm{s})(2k+1) &= \sum_{j=0}^{2N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi(2k+1)j}{2N}} \mathrm{s}(j) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi(2k+1)j}{2N}} \mathrm{s}(j) + \sum_{j=N}^{2N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi(2k+1)j}{2N}} \mathrm{s}(j) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi(2k+1)j}{2N}} \mathrm{s}(j) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi(2k+1)j}{2N}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi(2k+1)N}{2N}} \mathrm{s}(j+N) = 0,
\end{aligned}$$

koska $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi(2k+1)N}{2N}} = -1$ ja $\mathrm{s}(j+N) = \mathrm{s}(j)$.

Näin ollen

$$\mathcal{F}_{2N}(\mathrm{s})(m) = \begin{cases} 2\mathcal{F}_N(\mathrm{s})(\frac{m}{2}), & \text{kun } m \text{ on parillinen,} \\ 0, & \text{kun } m \text{ on pariton.} \end{cases}$$
