Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi
Harjoitus 2
15–17.1.2014, viikko 3

Gripenberg, Ruponen, Saari

P1. Laske funktion $s(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$ Fourier-muunnos $\hat{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\,\mathrm{d}t$ missä $a > 0$.

Vastaus: $\frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$

Ratkaisu: Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned}\hat{s}(\nu) &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}2\pi\nu)t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}2\pi\nu)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big/_{-\infty}^{0} \frac{1}{a-\mathrm{i}2\pi\nu}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}2\pi\nu)t} - \Big/_{0}^{\infty} \frac{1}{a+\mathrm{i}2\pi\nu}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}2\pi\nu)t} \\ &= \frac{1}{a-\mathrm{i}2\pi\nu} + \frac{1}{a+\mathrm{i}2\pi\nu} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}.\end{aligned}$$

P2. Olkoon $h_a(t) = \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$. Osoita tehtävän P1 tuloksen avulla, että $h_a * h_b = h_{a+b}$.

Huom! *Todennäköisyyslaskennallinen tulkinta tästä on, että jos riippumattomien satunnaismuuttujien X ja Y jakaumat ovat h_a ja h_b niin satunnaismuuttujan $X+Y$ jakauma on samaa tyyppiä eli h_{a+b}. Jos tällaisia satnnuaismuuttujia, joilla ei edes ole odotusarvoa, lasketaan yhteen, ei siis saada raja-arvona mitään normaalijakautunutta.*

Ratkaisu: Jos $a > 0$ ja jos $g_a(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$ niin tehtävän P1 nojalla $\widehat{g_a}(\nu) = h_a$. Koska molemmat funktiot ovat parillisia, niin pätee myös $\widehat{h_a} = g_a$. Mutta silloin $\mathcal{F}(h_a * h_b) = g_a g_b = g_{a+b} = \mathcal{F}(h_{a+b})$ ja Fourier-muunnoksen yksikäsitteisyyden nojalla saadaan $h_a * h_b = h_{a+b}$.

P3. Osoita, että jos $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin $\overline{h(t)} = \hat{q}(t)$ missä $q(t) = \overline{\hat{h}(t)}$. Osoita tämän tuloksen ja kaavan $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{q}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu)q(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ avulla, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu)\overline{\hat{h}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu, \quad g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

(josta sitten erikoisesti seuraa, että $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu$.)

Ratkaisu: Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla pätee

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{h}(\nu)\,\mathrm{d}\nu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Koska kompleksikonjugointi voidaan siirtää integraalin sisäpuolelle niin saadaan

$$\overline{h(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{h}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\overline{\hat{h}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu = \hat{q}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jos nyt kaavassa $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{q}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu)q(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ sijoitetaan $\hat{q}(t)$:n paikalle $\overline{h(t)}$ ja $q(\nu)$:n paikalle $\overline{\hat{h}(\nu)}$ saadaan nyt haluttu väite.

P4. Olkoon $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja märitellään $\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}s(t)\,\mathrm{d}t$, eli 2π on jätetty pois eksponenttifunktiosta. Määritä vakiot c_1 ja c_2 siten, että

$$s(t) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tilde{s}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

Vastaus: $\frac{1}{2\pi}$

Ratkaisu: Koska $\tilde{s}(\omega) = \hat{s}(\frac{\omega}{2\pi})$ ja $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ niin saadaan muuttujanvaihdolla $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, jolloin $\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\omega$,

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{\omega}{2\pi}t}\hat{s}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tilde{s}(\omega)\,\mathrm{d}\omega,$$

joten $c_1 = \frac{1}{2\pi}$.

Samalla muuttujanvaihdolla saadaan myös

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{s}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right|^2 \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega,$$

joten myös $c_2 = \frac{1}{2\pi}$.

P5. Olkoon $h_n(t) = \mathrm{e}^{\pi t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\right)$. Osoita induktiolla, että

$$\widehat{h_n} = (-\mathrm{i})^n h_n, \quad n \geq 0,$$

esim. seuraavalla tavalla:

- Voit olettaa tunnetuksi, että $\widehat{h_0} = h_0$ joten väite pätee kun $n = 0$.
- Käytä osittaisintegrointia osoittamaan, että
$$\widehat{h_{k+1}}(\nu) = \mathrm{i}2\pi\nu\widehat{h_k}(\nu) - \frac{1}{-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\widehat{h_k}(\nu).$$
- Oleta, että väite pätee kun $n = k$ ja käytä tätä oletusta edellisen kohdan tuloksessa niin, että pystyt osoittamaan, että väite pätee myös kun $n = k+1$ (jolloin siis saadaan väitetty tulos induktioperiaatteen avulla).

Ratkaisu: Osittaisintegroinnilla saadaan

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} h_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t = \Big/_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{\pi t^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\right) \\
&\qquad - \int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}2\pi\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{\pi t^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\right)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{\pi t^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{i}2\pi\nu\widehat{h_k}(\nu) - \frac{1}{-\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}(-\mathrm{i}2\pi t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{\pi t^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}2\pi\nu\widehat{h_k}(\nu) - \frac{1}{-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\widehat{h_k}(\nu).
\end{aligned}
$$

Induktio-oletuksen nojalla saadaan siis

$$
\begin{aligned}
&\widehat{h_{k+1}}(\nu) = \mathrm{i}2\pi\nu(-\mathrm{i})^k h_k(\nu) - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left((-\mathrm{i})^k h_k(\nu)\right) \\
&\qquad\qquad = -(-\mathrm{i})^{k+1}2\pi\nu h_k(\nu) + (-\mathrm{i})^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\mathrm{e}^{\pi\nu^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\nu^k}\mathrm{e}^{-2\pi\nu^2}\right) \\
&= (-\mathrm{i})^{k+1}\left(-2\pi\nu + 2\pi\nu\right)\mathrm{e}^{\pi\nu^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\nu^k}\mathrm{e}^{-2\pi\nu^2} + (-\mathrm{i})^{k+1}\mathrm{e}^{\pi\nu^2}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}\nu^{k+1}}\mathrm{e}^{-2\pi\nu^2} = (-\mathrm{i})^{k+1}h_{k+1}(\nu).
\end{aligned}
$$

Induktiopäättely toimii ja väite seuraa.
