Aalto-universitetet

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik — Gripenberg
Övning 2
Vecka 3, 12–16.1.2015

Besvara Stack-uppgifterna (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=18`)
senast 19.1.2015 kl. 12.00.

Lämna in lösningarna till I-uppgifterna senast 19.1.2015 kl. 12.00.
Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1. En käpp med längden 6 (meter) delas i två delar så att den ena delen har längden X och den andra längden $6 - X$ där X är en slumpvariabel som är jämnt fördelad i intervallet $[0, 6]$. Båda delarna delas i mitten och av delarna bildas en rektangel med sidoren $\frac{1}{2}X$ och $\frac{1}{2}(6 - X)$. Bestäm väntevärdet av arean av rektangeln. Är det en god idé att uppskatta väntevärdet genom att ta väntevärdet av X som värdet på X?

Ledning: Använd dig endast av täthetsfunktionen för X och formeln för väntevärdet av en funktion av en slumpvariabel och räkna alltså inte ut täthetsfunktionen eller fördelningsfunktionen för arean!

Svar: $\frac{3}{2}$

I2. Du reser på solsemester till Ologa, där sannolikheten att solen skiner är p och du har bestämt att du far hem genast när du har tillbringat $r \geq 1$ soliga dagar där. Använd följande resonemang för att härleda ett uttryck för sannolikheten att du stannar n dagar i Ologa om du antar att händelserna *"Dagen j är solig"* är oberoende för alla j (och denna sannolikhet är alltså värdet av frekvensfunktionen för den negativa binomialfördelningen i punkten n med parametrarna p och r dvs. $f_{\text{NegBin}(p,r)}(n)$):

(a) Låt A vara händelsen *"Du tillbringar n dagar i Ologa"*, B händelsen *"Dag nummer n är solig"* och C händelsen *"Av de $n - 1$ första dagarna är $r - 1$ soliga"*. En av kombinationerna av händelser A och B, A och C, eller B och C är säkert oberoende? Vilken är det?
(b) Uttryck händelsen A med hjälp av händelserna B och C.
(c) Bestäm $\Pr(B)$ och $\Pr(C)$.
(d) Bestäm $\Pr(A)$.

I3. En kommitté har 7 kvinnliga och 6 manlig medlemmar. Av dessa väljs slummässigt medlemmar till en arbetsgrupp, en i taget, tills det finns 3 kvinnor i arbetsgruppen. Vad är sannolikheten att det då finns 5 personer i arbetsgruppen, 3 kvinnor och 2 män?

Ledning: Räkna först ut sannolikheten att då det valts 4 medlemmar till arbetsgruppen så består den av 2 kvinnor och 2 män.

Svar: $\frac{35}{143}$

I4. Antag att livslängden för en viss komponent i en maskin är exponentialfördelad och antag också att 90% av dessa komponenter inte fungerar efter 60 dagar. Hur många gånger måste man i genomsnitt byta ut denna komponent mot en ny under ett års tid (om man alltså byter den genast då den gått sönder), dvs. vad är väntevärdet av antalet byten?

Ledning: Räkna först ut parametern för exponentialfördelningen genom att använda uttrycket för fördelningsfunktionen och kom sedan ihåg sambandet mellan exponential- och Poissonfördelningen (vilket säger att sambandet mellan den genomsnittliga livslängden och antal byten är enklast tänkbara just för exponentialfördelningen).

Svar: ≈ 14

I5. Antag att vikten av fiskar som fångats är $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-fördelad. Alla fiskar vars vikt är högst a ges åt kattorna. Bestäm medianen av viktfördelningen av de fiskar som inte ges åt kattorna och ge ditt svar med hjälp av parametrarna μ, σ, a och $\mathrm{N}(0,1)$-fördelningens fördelningsfunktion $F_{\mathrm{N}(0,1)}$ och dess inversa funktion.

Ledning: Hälften av de fiskar vars vikt är större än a väger mindre än den median som skall bestämmas och hälften väger mera. Kom också ihåg att $F_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}(t) = F_{\mathrm{N}(0,1)}(\frac{t-\mu}{\sigma})$ och att arean under täthetsfunktionen i ett intervall är sannolikheten för att slumpvariablen får sitt värde i detta intervall.