MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik
Sammanfattning och exempel, del I

G. Gripenberg

Aalto-universitetet

13 februari 2015

Vad är sannolikhet?

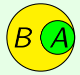
- *Relativ frekvens vid upprepningar: Om en fabrik tillverkat* 1000 000 *exemplar av en produkt av vilka* 5015 *har något fel så är sannolikheten för en felaktighet* 0.005
- *Andelen fall då ett något förekommer: Om i en urna finns* 6 *svarta och* 4 *vita kulor och man slumpmässigt väljer en kula så är sannolikheten att den är svart* $\frac{6}{6+4} = 0.6$.
- *Ett mått på hur troligt man anser något vara: "Sannolikheten för hård vind imorgon är 70%."*

Slumpmässigt försök, utfallsrum, elementarhändelse, händelse, sannolikhet

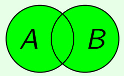
- **Slumpmässigt försök**: *Vi kastar en tärning en gång.*
- **Utfallsrum**: *Resultatet av det slumpmässiga försöket är ett heltal mellan* 1 *och* 6. *Utfallsummet är mängden av alla resultat, dvs. mängden* $\{1,2,3,4,5,6\}$.
- **Händelse**: *Varje delmängd av utfallsrummet, tex.* $\{2,4,6\}$ *är en händelse. En händelse inträffar om resultatet av försöket hör till händelsen.*
- **Elementarhändelse**: *Varje element* 1, 2, 3, 4, 5 *och* 6 *i utfallsrummet är en elementarhändelse.*
- **Sannolikhet**: *I dethär fallet är det naturligt att anta att sannolikheten för händelsen* A *är* $\Pr(A) = \dfrac{|A|}{6}$ *där* $|A|$ *är antalet element i* A *men det är inte enda möjligheten!*

En kort repetition i mängdlära

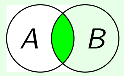
- $\omega \in A$ *om* ω *hör till mängden* A*, dvs.* ω *är ett element i* A*.*
- *Delmängd:* $A \subset B$ *om varje element i* A *också är ett element i* B*, dvs. "händelsen* B *inträffar om händelsen* A *inträffar".*



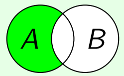
- *Union:* $A \cup B = \{\,\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ eller } \omega \in B\,\}$*, dvs. "händelsen* A *inträffar* **eller** *händelsen* B *inträffar (eller båda inträffar)".*



- *Snitt:* $A \cap B = \{\,\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ och } \omega \in B\,\}$*, dvs. "händelsen* A *inträffar* **och** *händelsen* B *inträffar".*

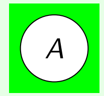


- *Differens:* $A \setminus B = \{\,\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ men } \omega \notin B\,\}$ *dvs. "händelsen* A *inträffar men händelsen* B *inträffar inte".*



En kort repetition i mängdlära, forts.

- *Komplement* $A^c = \Omega \setminus A = \{\,\omega \in \Omega : \omega \notin A\,\}$*, dvs. "händelsen* A *inträffar inte".*



- *Tom mängd:* $\emptyset$ *är den tomma mängden som inte innehåller något element alls. Två mängder eller händelser sägs vara disjunkta om* $A \cap B = \emptyset$*, dvs. om de inte har några gemensamma element.*
- *Numrerbar union:* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{\,\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ för något } j \geq 1\,\}$*, dvs. "åtminstone någon av händelserna* A_j *inträffar".*

Obs!

Då Ω *innehåller ändligt många element är det naturligt att att alla delmängder av* Ω *är händelser men i allmänhet är detta inte alltid möjligt eller ens önskvärt och då är* Pr *en funktion definierad i en* σ*-algebra* $\mathcal{A}$ *i* Ω*, dvs en mängd* $\mathcal{A}$ *med följande egenskaper:*

- $A \in \mathcal{A} \to A \subset \Omega$,
- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \to \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
- $A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2, \ldots \to \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Sannolikhet, händelser, utfallsrum

- *Mängden av alla tänkbara resultat av ett "experiment" eller ett "slumpmässigt försök" är* **utfallsrummet***, ofta betecknat med* Ω*.*
- *Elementen i utfallsrummet, dvs. enskilda resultat av experimentet är* **elementarhändelser***.*
- **Händelser** *är delmängder av utfallsrummet och när man säger att händelsen* A *inträffar, menar man alltid att någon elementarhändelse som hör till* A *inträffar.*
- *För varje händelse* $A \subset \Omega$ *finns det en sannolikhet* $\mathrm{Pr}(A)$*.*
- *Sannolikhetsfunktionen skall uppfylla följande villkor:*
  - ★ $0 \leq \mathrm{Pr}(A) \leq 1$ *för varje händelse* A*.*
  - ★ $\mathrm{Pr}(\Omega) = 1$.
  - ★ $\mathrm{Pr}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Pr}(A_i)$ *om* $A_j \cap A_k = \emptyset$ *då* $j \neq k$*.*

  Då gäller också följande:
  - ★ $\mathrm{Pr}(\emptyset) = 0$.
  - ★ $\mathrm{Pr}(A \cup B) = \mathrm{Pr}(A) + \mathrm{Pr}(B) - \mathrm{Pr}(A \cap B)$.
  - ★ $\mathrm{Pr}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{Pr}(A)$.
  - ★ $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Pr}(A) \leq \mathrm{Pr}(B)$.

Oberoende

Händelserna A *och* B *är oberoende ifall*

$$\mathrm{Pr}(A \cap B) = \mathrm{Pr}(A) \cdot \mathrm{Pr}(B),$$

och händelserna A_j*,* $j \in J$ *är oberoende om*

$$\mathrm{Pr}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_m}) = \mathrm{Pr}(A_{j_1}) \cdot \mathrm{Pr}(A_{j_2}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Pr}(A_{j_m})$$

alltid då $j_k \in J$*,* $k = 1, \ldots, m$*,* $j_p \neq j_q$ *då* $p \neq q$*.*

Obs!

Om händelserna A_j*,* $j \in J$ *är oberoende så är* A_{j_p} *och* A_{j_q} *oberoende då* $j_p \neq j_k$ *men om* A_{j_p} *och* A_{j_q} *är oberoende för alla* $j_p \neq j_k$ *så behöver inte händelserna* A_j*,* $j \in J$ *vara oberoende.*

Oberoende

Vi kastar en vanlig tärning två gånger. Då är utfallsrummet $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ *där* $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$ *är utfallsrummen för det första och det andra kastet så att* $\Omega = \{\, (j,k) : j,k = 1,2,3,5,6 \,\}$. *Om A är händelsen* {" 2 *eller* 3 *i första kastet*"} *och B är händelsen* {" 3, 4 *eller* 5 *i andra kastet*"} *så är det intuitivt klart att A och B är oberoende. Detta kan också beskrivas på följande sätt:*

$A =$

x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x

$B =$

		x	x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	

Vi ser alltså att $A = \{2,3\} \times \Omega_2$ *och* $B = \Omega_1 \times \{3,4,5\}$ *och* $\Pr(A) = \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ *och* $\Pr(B) = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 6} = 1 \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Oberoende, forts.

Händelsen $A \cap B$ *kan beskrivas på följande sätt*

$A \cap B =$

		x	x	x	
		x	x	x	

och

$$\Pr(A \cap B) = \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \Pr(A) \cdot \Pr(B),$$

dvs. händelserna A och B är oberoende.
De enklaste fallen då man har oberoende händelser är av denna typ, dvs. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ *och* $\Pr(A_1 \times B_2) = \Pr_1(A_1) \cdot \Pr_2(B_2)$ *då* $A_1 \subset \Omega_1$ *och* $B_2 \subset \Omega_2$ *för då blir* $A = A_1 \times \Omega_2$ *och* $B = \Omega_1 \times B_2$ *oberoende.*

Oberoende

Vi singlar slant två gånger och låter A_1, A_2 *och* A_3 *vara följande händelser:* $A_1 = \{$ *"Första kastet krona"* $\}$, $A_2 = \{$ *"Andra kastet krona"* $\}$ *och* $A_3 = \{$ *"Ena kastet (men inte båda kasten) krona"* $\}$. *Vilka av dessa händelser är oberoende och vilka inte?*
Utfallsrummet är i dethär fallet $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ *där H är krona och T klave. Då är* $A_1 = \{HH, HT\}$, $A_2 = \{HH, TH\}$ *och* $A_3 = \{HT, TH\}$. *Om vi nu antar att vi har en vanlig slant så kan vi anta att sannolikheten för händelsen* $A \subset \Omega$ *är* $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ *så att*
$\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \Pr(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *och* $\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(\{HH\}) = \frac{1}{4}$,
$\Pr(A_1 \cap A_3) = \Pr(\{HT\}) = \frac{1}{4}$ *och* $\Pr(A_2 \cap A_3) = \Pr(\{TH\}) = \frac{1}{4}$.
Av detta ser vi att händelserna A_i *och* A_j *är oberoende då* $i,j \in \{1,2,3\}$ *och* $i \neq j$ *för då är* $\Pr(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = \Pr(A_i) \cdot \Pr(A_j)$.
Men $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Pr(\emptyset) = 0 \neq \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2) \cdot \Pr(A_3)$ *så att händelserna* A_1, A_2 *och* A_3 *är inte oberoende utan bara parvis oberoende.*

Betingad sannolikhet

Den betingade sannolikheten för händelsen A givet händelsen B är

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)},$$

då man antar att $\Pr(B) > 0$.
Då händelsen B är given kan man begränsa utfallsrummet från Ω *till B och räkna om sannolikheterna för händelserna* $A \cap B$ *som är delmängder av det nya utfallsrummet.*

Produktregeln för betingad sannolikhet

Av definitionen för betingad sannolikhet följer den sk. produktregeln

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B|A),$$

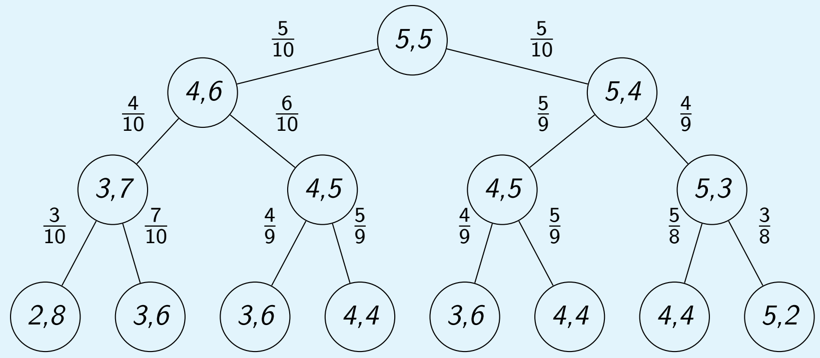
och mera allmänt

$$\Pr(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1) \cdot \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \Pr(A_k|A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}).$$

Träddiagram som hjälpmedel

I en urna finns 5 vita och 5 svarta kulor. Vi plockar slumpmässigt en kula ur urnan och om den är vit lägger vi en svart kula i urnan (och vi lägger alltså inte tillbaka den vita kulan) och om den är svart lägger vi inte någon kula i urnan. Vi upprepar denna procedur ännu två gånger. Vad är sannolikheten att att det efter detta finns 6 svarta kulor i urnan?
Här kan vi använda produktregeln för den betingade sannolikheten men det är enklast om vi ritar ett träd där vi väljer bågen nedåt till vänster om vi plockar en vit kula och bågen nedåt till höger om vi plockar en svart kula. I varje nod skriver vi antalet vita och svarta kulor och vid varje båge skriver vi (den betingade) sannolikheten att den väljs då det i urnan finns de antal vita och svarta kulor som nodens siffror anger. Då ser trädet ut på följande sätt:

Träddiagram som hjälpmedel, forts.



Av diagrammet ser vi att det i 3 fall finns 6 svarta kulor i urnan och sannolikheter för att komma till en viss nod får vi genom att multiplicera sannoikheterna för de bågar som leder till denna nod med varandra. Svaret får vi sedan genom att addera dessa sannolikheter:

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1607}{4050}\approx 0.4.$$

Bayes formel: Exempel

I ett land bor två lika stor stammer, lögnarna och skurkarna. Av lögnarna svarar 40% och av skurkarna 80% sanningsenligt på alla frågor. Du träffar på en invånare i landet och frågar om hen är en lögnare eller en skurk och hen säger sig vara en lögnare. Vad är sannolikheten att hen verkligen är en lögnare?
Vi antar för enkelhetens skull att det bor sammanlagt 1000 lögnare och 1000 skurkar i landet. Då vet vi att 400 av lögnarna svarar sanningsenligt och säger sig vara lögnare. Av skurkarna far 200 fram med osanningar och säger sig också vara lögnare. Dethär betyder att sammanlagt 600 personer säger sig vara lögnare och av dessa är 400 verkligen lögnare så att sannolikheten att den person du träffat verkligen är en lögnare är $\frac{400}{600}=\frac{2}{3}$.

Total sannolikhet

Om $\cup_{j=1}^n A_j=\Omega$, $A_j\cap A_k=\emptyset$ *då* $j\neq k$ *och* $\Pr(A_j)>0$ *då* $j=1,\dots,n$ *så gäller*

$$\Pr(B)=\sum_{j=1}^n \Pr(A_j)\cdot\Pr(B|A_j).$$

Varför? Eftersom $B=B\cap\Omega=\cup_{j=1}^n B\cap A_j$ *och* $(B\cap A_j)\cap(B\cap A_k)=\emptyset$ *då* $j\neq k$ *så är* $\Pr(B)=\sum_{j=1}^n\Pr(B\cap A_j)$ *och enligt definitionen är* $\Pr(A_j)\cdot\Pr(B|A_j)=\Pr(B\cap A_j)$.

Bayes formel

Om $\cup_{j=1}^n A_j=\Omega$, $A_j\cap A_k=\emptyset$ *då* $j\neq k$, $\Pr(B)>0$ *och* $P(A_j)>0$, $j=1,\dots,n$ *så gäller*

$$\Pr(A_k|B)=\frac{\Pr(A_k)\cdot\Pr(B|A_k)}{\sum_{j=1}^n\Pr(A_j)\cdot\Pr(B|A_j)}.$$

Varför?

$$\Pr(A_k|B)=\frac{\Pr(A_k\cap B)}{\Pr(B)},\quad \Pr(A_k)\cdot\Pr(B|A_k)=\Pr(A_k\cap B)\quad \textit{och}$$

$$\sum_{j=1}^n\Pr(A_j)\cdot\Pr(B|A_j)=\Pr(B).$$

Bayes formel: Exempel, version 2

I ett land bor två lika stor stammer, lögnarna och skurkarna. Av lögnarna svarar 40% och av skurkarna 80% sanningsenligt på alla frågor. Du träffar på en invånare i landet och frågar om hen är en lögnare eller en skurk och hen säger sig vara en lögnare. Vad är sannolikheten att hen verkligen är en lögnare?

Låt L vara händelsen att du möter en lögnare och S händelsen att du möter en skurk. Enligt antagandet är $\Pr(L) = \Pr(S) = 0.5$. Låt SL vara händelsen att personen du träffat säger sig vara en lögnare så att vi vet att

$$\Pr(SL|L) = 0.4 \quad och \quad \Pr(SL|S) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Nu skall vi räkna ut $\Pr(L|SL)$ och med Bayes formel får vi

$$\Pr(L|SL) = \frac{\Pr(SL|L)\Pr(L)}{\Pr(SL|L)\Pr(L) + \Pr(SL|S)\Pr(S)} = \frac{0.4 \cdot 0.5}{0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}.$$

Klassisk sannolikhet och kombinatorik

$$\Pr(A) = \frac{\textit{Antal fall då A inträffar}}{\textit{Totala antalet möjliga fall}}$$

Man antar alltså att varje elementarhändelse är lika sannolik och problemet blir att bestämma hur många element det det finns i utfallsrummet Ω och hur många av dessa hör som till mängden A.

Produktprincipen

Om i en urvalsprocess finns k steg och i steg j finns n_j alternativ, oberoende av vilka val som gjorts i tidigare steg (men vilka alternativen är kan bero på valen) *så är det totala antalet alternativ*

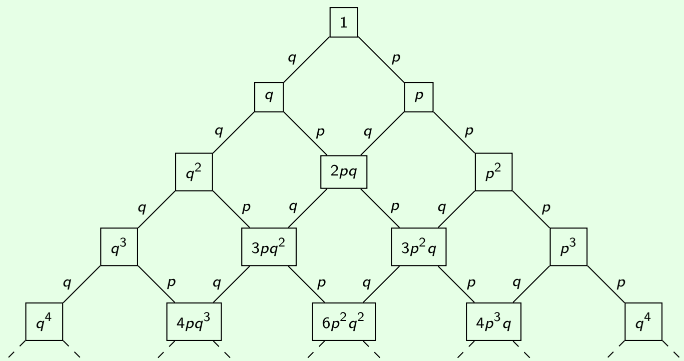
$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Permutationer, binomialkoefficienter etc.

- *Om det i en mängd finns n element kan dessa ordnas på*
  $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$
  olika sätt. (Kom ihåg: $0! = 1$)
- *Om man ur en mängd med n element väljer k element och beaktar i vilken ordning elementen väljs, kan detta göras på*
  $$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
  olika sätt.
- *Om man ur en en mängd med n element väljer en delmängd med k element, dvs. inte beaktar i vilken ordning elementen väljs, kan detta göras på*
  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
  olika sätt. Av dethär följer att om ett experiment upprepas n gånger så att händelser vid olika gånger är oberoende *så är sannolikheten för att händelsen A inträffar exakt k gånger $\binom{n}{k}\Pr(A)^k(1-\Pr(A))^{n-k}$.*

Binomialfördelningen som träddiagram

Antag att vi upprepar ett experiment så att resultaten är oberoende, händelsen A inträffar med sannolikheten p och händelsen A^c med sannolikheten $q = 1 - p$. I följande träddiagram väljs en båge nedåt till höger väljs om händelsen A inträffar annars en båge nedåt till vänster och sannolikheten att händelsen A inträffar k gånger vid n upprepningar fås som summan av produkterna av sannolikheterna längs alla vägar med k steg till höger och $n-k$ till vänster, vilket ger $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.



Plocka kulor med eller utan återläggning

Antag att i en urna finns s svarta och v vita kulor och att vi plockar n kulor ur urnan.

(a) *Om vi för varje kula noterar vilken färg den har och sedan lägger den tillbaka i urnan så använder vi återläggning. Sannolikheten att vi plockar en svart kula är $\frac{s}{s+v}$ och för en vit är den $\frac{v}{s+v}$ så att sannolikheten att vi plockar k svarta och $n-k$ vita i en viss given ordning är $\left(\frac{s}{s+v}\right)^k\left(\frac{v}{s+v}\right)^{n-k}$ och då är sannolikheten att vi plockar k svarta och $n-k$ vita i vilken ordning som helst*

$$\binom{n}{k}\left(\frac{s}{s+v}\right)^k\left(\frac{v}{s+v}\right)^{n-k}.$$

(b) *Om vi däremot inte använder återläggning så kommer sannolikheten att vi plockar en svart kula att bero på vilka kulor vi redan plockat och sannolikheten att vi plockar k svarta och $n-k$ vita är $\frac{\binom{s}{k}\cdot\binom{v}{n-k}}{\binom{s+v}{n}}$ eftersom vi kan plocka k svarta bland s svarta på $\binom{s}{k}$ olika sätt och $n-k$ vita bland v vita på $\binom{v}{n-k}$ olika sätt.*

Slumpvariabler och fördelningsfunktioner

En (reell) **slumpvariabel** *(eller* **stokastisk variabel***) är en funktion $X:\Omega\to\mathbb{R}$ (alltså inte egentligen en variabel) där Ω är ett utfallsrum för ett experiment i vilken en sannolikhet är definierad och $\{\,\omega\in\Omega : X(\omega)\le t\,\}$ är en händelse för alla $t\in\mathbb{R}$.*

Om X är en (reell) slumpvariabel så är dess (kumulativa) fördelningsfunktion funktionen

$$F_X(t)=\Pr(X\le t)=\Pr\big(\{\,\omega\in\Omega : X(\omega)\le t\,\}\big).$$

En funktion $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ är en fördelningsfunktion om och endast om

- $0\le F(s)\le F(t)\le 1$ *då $s<t$,*
- $\lim_{t\to-\infty}F(t)=0$ *och* $\lim_{t\to\infty}F(t)=1$,
- $\lim_{s\to t+}F(s)=F(t)$ *då $t\in\mathbb{R}$.*

När F är en fördelningsfunktion för X så gäller dessutom att

- $F(t)-F(s)=\Pr(s<X\le t)$ *då $s<t$,*
- $\lim_{s\to t-}F(s)=\Pr(X<t)$,
- $\lim_{s\to t+}F(s)-\lim_{s\to t-}F(s)=F(t)-\lim_{s\to t-}F(s)=\Pr(X=t)$.

Obs!

Uttryck som $X\le t$ och $X<t$ är formellt sett inte händelser (dvs. delmängder i Ω) men man skriver oftast $\Pr(X\le t)$ istället för det längre uttrycket $\Pr\big(\{\,\omega\in\Omega : X(\omega)\le t\,\}\big)$.

Oberoende slumpvariabler

De (reella) slumpvariablerna X_j, $j\in J$ definierade i samma utfallsrum är oberoende om händelserna $\{\,X_j\le a_j\,\}$, $j\in J$ är oberoende för alla $a_j\in\mathbb{R}$, $j\in J$ och då är också händelserna $\{\,X_j\in A_j\,\}$, $j\in J$ oberoende för alla Borel mängder A_j.

En slumpvariabels sannolikhetsfördelning

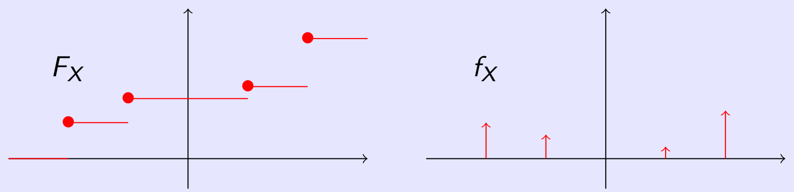
Slumpvariabelns $X:\Omega\to\mathbb{R}$ sannolikhetsfördelning (eller bara fördelning) är sannolikhetsfunktionen $\Pr_X(A)=\Pr(X\in A)$ där $A\subset\mathbb{R}$ är sådan att $\{\,\omega\in\Omega : X(\omega)\in A\,\}$ är en händelse dvs. mängden reella tal är utfallsrummet och sannolikheterna för dess händelser definieras med funktionen $\Pr_X$. Om slumpvariabelns X fördelning är tex. den sk. normalfördelningen med parameterna μ och σ^2 så skriver man dess fördelningsfunktion som $F_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}$ istället för F_X.

Diskreta slumpvariabler

En (reell) slumpvariabel X är diskret om det finns en mängd $A\subset\mathbb{R}$ och positiva tal $f_X(a)$, $a\in A$ så att

$$F_X(t)=\sum_{\substack{a\le t\\ a\in A}}f_X(a).$$

Detta innebär att $\Pr(X=a)=f_X(a)$ då $a\in A$ och $\sum_{a\in A}f_X(a)=1$ så att $\Pr(X\notin A)=0$ och mängden A innehåller högst numrerbart många element och vi kan anta att $f_X(t)=0$ då $t\notin A$. Funktionen f_X är **frekvensfunktionen** *eller sannolikhetsfunktionen för X.*

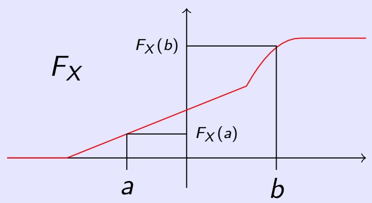


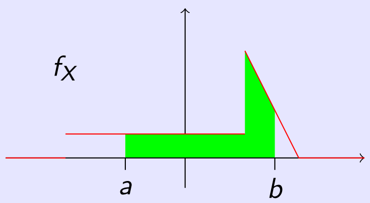
Kontinuerliga slumpvariabler

En slumpvariabel X är kontinuerlig om fördelningsfunktionen är kontinuerlig, dvs. om $\Pr(X=a)=0$ *för alla* $a\in\mathbb{R}$. *Oftast antar man ändå att slumpvariabeln X har en* **täthetsfunktion** f_X *så att*

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,\mathrm{d}s.$$

Detta innebär att $f_X(s)\geq 0$ *och* $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,\mathrm{d}s=1$.





$$\Pr(a\leq X\leq b)=\Pr(a<X<b)=F_X(b)-F_X(a)=\int_a^b f_X(s)\,\mathrm{d}s.$$

Exponentialfördelningen

Vi säger att slumpvariabeln X har exponentialfördelningen med parametern λ, dvs. $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *om den har fördelningsfunktionen*

$$F_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Då har den täthetsfunktionen $f_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ *då* $t>0$ *och* $f_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t)=0$ *då* $t<0$.
En exponentialfördelad slumpvariabel "saknar minne" på så sätt att om $s,t\geq 0$ *så gäller*

$$\Pr(X>t+s\,|\,X>s)=\Pr(X>t),$$

dvs. en apparat som fungerar tiden X är som ny så länge den fungerar.
Varför? $\Pr(X>u)=\mathrm{e}^{-\lambda u}$ *och* $\{X>t+s\}\cap\{X>s\}=\{X>t+s\}$ *så att*

$$\Pr(X>t+s\,|\,X>s)=\frac{\Pr(X>t+s \text{ och } X>s)}{\Pr(X>s)}=\frac{\Pr(X>t+s)}{\Pr(X>s)}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}}=\mathrm{e}^{-\lambda t}=\Pr(X>t).$$

Väntevärde

Om X är en diskret slumpvariabel med frekvensfunktion f_X så är dess väntevärde

$$\mathrm{E}(X)=\sum_a a\Pr(X=a)=\sum_a af_X(a),$$

och om X är en kontinuerlig slumvariabel med täthetsfunktion f_X så är dess väntevärde

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} sf_X(s)\,\mathrm{d}s,$$

i båda fallen förutsatt att summan eller integralen existerar (dvs. $\sum_{a>0} af_X(a)<\infty$ *eller* $\sum_{a<0}|a|f_X(a)<\infty$ *och* $\int_0^\infty tf_X(t)\,\mathrm{d}t<\infty$ *eller* $\int_{-\infty}^0 |t|f(t)\,\mathrm{d}t<\infty$*), i annat fall skriver man* $\mathrm{E}(X)=\mathit{NaN}$ *och säger att slumpvariabeln inte har något väntevärde.*

Odds och Bayes formel

Antag att du deltar i ett hasardspel där du vinner och får en euro av din motspelare med sannolikheten p och förlorar och ger din motspelare v euro med sannolikheten $1-p$. För vilket värde på v är detta ett rättvist spel?
Din vinst eller förlust är en slumpvariabel X som får värdet 1 med sannolikheten p och värdet $-v$ med sannolikheten $1-p$ och din motspelares vinst är $-X$. Vi kan säga att spelet är rättvist om väntevärdet av båda spelarnas vinst är 0, dvs. $\mathrm{E}(X)=1\cdot p-v\cdot(1-p)=0$ *så att*

$$v=\frac{p}{1-p},$$

som är spelets **odds** *för dig. Dethär begreppet dyker också upp i samband med Bayes formel på följande sätt: Om B är någon händelse så är oddsen för den* $\frac{\Pr(B)}{\Pr(B^c)}=\frac{\Pr(B)}{1-\Pr(B)}$. *Om vi vet att någon (annan) händelse A inträffat så får vi med hjälp av Bayes formel uppdaterade odds för händelsen B under villkor att A inträffat, dvs.*

$$\frac{\Pr(B|A)}{\Pr(B^c|A)}=\frac{\Pr(A|B)}{\Pr(A|B^c)}\cdot\frac{\Pr(B)}{\Pr(B^c)}.$$

Väntevärdet av en funktion av en slumpvariabel

Om X är en diskret slumpvariabel och g är en mätbar *funktion så är*

$$E(g(X)) = \sum_a g(a)\Pr(X = a) = \sum_a g(a) f_X(a)$$

och om X är en kontinuerlig slumpvariabel med täthetsfunktion f_X så är

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) f_X(s)\, ds.$$

Om $g(t) = 1$ då $t \in A$ och $g(t) = 0$ annars (och då skriver man ofta $g = \mathbf{1}_A$) så är

$$E(g(X)) = \Pr(X \in A),$$

dvs. också sannolikheter kan skrivas som väntevärden.

Sankt Petersburgsparadoxen

Du får mot betalning delta i följande spel: En slant singlas tills det blir en krona. Om detta sker på det n:te gången så får du 2^n euro.
Hur mycket är du villig att betala för att få delta i spelet?
Sannolikheten att den första kronan kommer på det n:te kastet är 2^{-n} (enda möjligheten är att det blir $n-1$ klavor och sedan en krona), så att väntevärdet av vinsten blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Pr(\textit{krona på n:te kastet}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Det finns många orsaker varför det inte är förnuftigt att betala vad som helst för att få delta i dethär spelet (eller att ens ge sig in i det) och dethär exemplet visar att väntevärdet inte kan tillämpas på alla situationer.

Varians och standardavvikelse

Om slumpvariabeln X har ett väntevärde så är dess **varians**

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big),$$

och dess **standardavvikelse** *är on*

$$D(X) = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

(Observera att variansen aldrig är negativ!)
Fördelen med standardavvikelsen är att den har samma enhet som X och att $D(\alpha X) = |\alpha| D(X)$ då α är något reellt tal medan $\mathrm{Var}(\alpha X) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X)$ och $\mathrm{Var}(X)$ har enheten m^2 om X tex. har enheten m (men variansen har andra stora fördelar).

Väntevärdet är linjärt och monotont

Ifall X_1 och X_2 är två slumpvariabler (definierade i samma utfallsrum)*, som har ändliga väntevärden och c_1 och c_2 är reella tal så är*

$$E(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1 E(X_1) + c_2 E(X_2),$$

och om dessutom $\Pr(X_1 \le X_2) = 1$ så är

$$E(X_1) \le E(X_2).$$

En följd av dethär är att (där $\mathbf{1}$ *är en slumpvariabel som får värdet 1 med sannolikheten 1)*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E\big((X - E(X))^2\big) = E\big(X^2 - 2X E(X) + E(X)^2\big) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 E(\mathbf{1}) = E(X^2) - E(X)^2.\end{aligned}$$

Variansen av summan av två slumpvariabler

Ifall X_1 *och* X_2 *är* **oberoende** *slumpvariabler* *(definierade i samma utfallsrum)* *så är*

$$\operatorname{Var}(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1^2\operatorname{Var}(X_1) + c_2^2\operatorname{Var}(X_2),$$

om c_1 *och* c_2 *är reella tal och i allmänhet (förutsatt att varianserna är ändliga) gäller*

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(c_1X_1 + c_2X_2) &= c_1^2\operatorname{Var}(X_1)\\ &\quad + 2c_1c_2\mathrm{E}\big((X_1 - \mathrm{E}(X_1))(X_2 - \mathrm{E}(X_2))\big) + c_2^2\operatorname{Var}(X_2).\end{aligned}$$

Chebyshevs olikhet

Om variansen av X *är liten, vad är då sannolikheten att* X *avviker mycket från sitt väntevärde? Chebyshevs olikhet ger ett svar:*

$$\Pr\left(|X - \mathrm{E}(X)| \ge c\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\right) \le \frac{1}{c^2}, \quad c > 1.$$

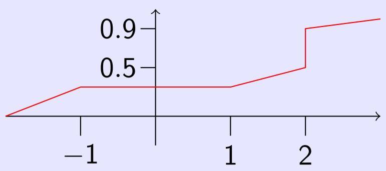
Varför? Låt $g(t) = 1$ *om* $\frac{|t-\mathrm{E}(X)|}{c\sqrt{\operatorname{Var}(X)}} \ge 1$, *dvs. om* $|t - \mathrm{E}(X)| \ge c\sqrt{\operatorname{Var}(X)}$ *och* 0 *annars. Detta betyder att* $\mathrm{E}(g(X)) = \Pr(|X - \mathrm{E}(X)| \ge c\sqrt{\operatorname{Var}(X)})$ *eftersom* $\mathrm{E}(\mathbf{1}_A(X)) = \Pr(X \in A)$. *Nu är* $g(t) \le \left(\frac{|t-\mathrm{E}(X)|}{c\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}\right)^2$ *eftersom* $g(t) = 0$ *om* $\left(\frac{|t-\mathrm{E}(X)|}{c\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}\right)^2 < 1$ *och annars* 1 *så att*

$$\begin{aligned}\Pr\left(|X - \mathrm{E}(X)| \ge c\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\right) &= \mathrm{E}(g(X)) \le \mathrm{E}\left(\left(\frac{|X - \mathrm{E}(X)|}{c\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{c^2\operatorname{Var}(X)}\mathrm{E}\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = \frac{1}{c^2}\frac{\operatorname{Var}(X)}{\operatorname{Var}(X)} = \frac{1}{c^2}.\end{aligned}$$

Kvantiler

Antag att X *är en slumpvariabel med fördelningsfunktion* F_X *och* $0 < p < 1$.

- *Om* F_X *har en invers funktion så är* $x_p = F_X^{-1}(p)$ *slumpvariabelns* X *och dess fördelnings* p-**kvantil**.
- *I allmänhet är* x_p *en* p-**kvantil** *ifall*
$$\begin{aligned}&\Pr(X < x_p) \le p \le \Pr(X \le x_p),\\ &\Pr(X > x_p) \le 1 - p \le \Pr(X \ge x_p).\end{aligned}$$
- **Medianen** *är en 0.5-kvantil.*
- *Kvantilerna är inte nödvändigtvis entydiga men de existerar alltid.*
- *Ofta väljer man som* p-*kvantil mittpunkten på intervallet med alla* p-*kvantiler.*



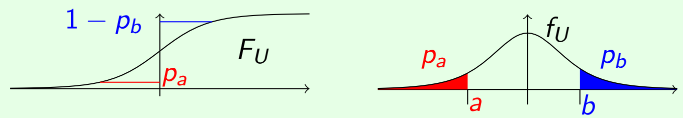
$x_{0.4} \in [-1, 1]$

$x_q = 2, \quad q \in [0.5, 0.9]$

Kvantiler, forts.

I många beräkningar i statistik bildar vi först en "testvariabel" U, *vars fördelningsfunktion* F_U *och täthetsfunktion* f_U *vi känner till (åtminstone approximativt). Sedan bestämmer vi tal* a *och* b *så att* $\Pr(U < a) = p_a$ *och* $\Pr(U > b) = p_b$ *där vanligtvis* $p_a = p_b$ *men ibland är det ena talet* 0. *Om fördelningsfunktionen* F_U *har en invers funktion så får vi*

$$a = F_U^{-1}(p_a) \quad \text{och} \quad b = F_U^{-1}(1 - p_b)$$



Med hjälp av dessa tal a *och* b *och definitionen av testvariabeln kan vi sedan räkna ut det vi verkligen är intresserade av.*
Ifall U *som här är kontinuerlig så är* $\Pr(U < a) = \Pr(U \le a)$ *och* $\Pr(a \le U \le b) = \Pr(a < U < b) = 1 - p_a - p_b$.

Några viktiga diskreta slumpvariabler och deras fördelningar

- *Jämn diskret fördelning:* $\Pr(X = x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *och man antar att $x_i \neq x_j$ då $i \neq j$.*
- *Bernoullifördelning* $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $0 \leq p \leq 1$:
  - $\Pr(X = 1) = p$, $\Pr(X = 0) = (1 - p)$ *dvs.* $X(\omega) = 1$ *då* $\omega \in A \subset \Omega$ *och* $X(\omega) = 0$ *då* $\omega \in \Omega \setminus A$ *där* $\Pr(A) = p$.
  - $E(X) = p$ *och* $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.
- *Binomialfördelning* $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$:
  - $\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
  - *X är summan av n oberoende Bernoulli(p)-fördelade slumvariabler, dvs. experimentet upprepas n gånger med oberoende resultat och händelsen A, med sannolikheten p inträffar X gånger.*
  - $E(X) = np$ *och* $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.
- *Poisson-fördelning* $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$:
  - $\Pr(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.
  - *Fås som gränsvärde av binomialfördelningen då $n \to \infty$ och $np \to \lambda$.*
  - $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.

Några viktiga diskreta slumpvariabler och deras fördelningar, forts.

- *Hypergeometrisk fördelning* $X \sim \text{HyperGeom}(N, r, n)$ $0 \leq n, r \leq N$:
  - $\Pr(X = k) = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
  - *Om man plockar n kulor ur en urna som innehåller r vita och $N - r$ svarta kulor så är X antalet vita kulor man plockat.*
  - $E(X) = \frac{nr}{N}$, $\text{Var}(X) = \frac{nr}{N} \cdot \frac{N-r}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$.
- *Geometrisk fördelning* $X \sim \text{Geom}(p)$:
  - $\Pr(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$, $k \geq 1$.
  - *Ett experiment upprepas tills händelsen A med sannolikheten p har inträffat och X är antalet upprepningar.*
  - $E(X) = \frac{1}{p}$ *och* $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- *Negativ binomialfördelning* $X \sim \text{NegBin}(p, r)$, $0 < p \leq 1$, $r \geq 1$:
  - *Ett experiment upprepas tills händelsen A med sannolikheten p har inträffat r gånger och X är antalet upprepningar, dvs. X är summan av r oberoende* Geom(p)*-fördelade slumpvariabler.*
  - $\Pr(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1 - p)^{n-r}$.
  - $E(X) = \frac{r}{p}$, *och* $\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

Några viktiga kontinuerliga slumpvariabler och deras fördelningar

- *Likformig kontinuerlig fördelning (där $-\infty < a < b < \infty$):*

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t < a \quad \text{eller} \quad t > b. \end{cases}$$

  $E(X) = \frac{1}{2}(a + b)$ *och* $\text{Var}(X) = \frac{1}{12}(b - a)^2$.
- *Normalfördelning* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f_x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

  $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$, *och* $F_{N(\mu,\sigma^2)}(t) = F_{N(0,1)}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$.
- *Exponentialfördelning* $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$:

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

  $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ *och* $\text{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
  Observera att som parameter ofta används väntevärdet $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Sambandet mellan Poisson- och exponentialfördelningen

- *Kunder anländer till en servicepunkt med oberoende och* Exp(λ)*-fördelade intervall om och endast om antalet kunder som kommer inom ett intervall med längden T är en slumpvariabel som har en* Poisson(λT)*-fördelning och antalet kunder som anländer inom disjunkta tidsintervall är oberoende.*
- *I detta fall är väntevärdet längden av tidsintervallet mellan två ankomsttider $\dfrac{1}{\lambda}$ och väntevärdet av antalet kunder som anländer inom ett tidsintervall med längden T är λT.*
- *Om $\ldots < T_{-1} < T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$ så gäller*
  - $U_{(a,b]} = |\{ j : T_j \in (a, b] \}|$ *är* Poisson($\lambda(b - a)$)*-fördelad då $a < b$ och $U_{(a_1,b_1]}$ och $U_{(a_2,b_2]}$ är oberoende om $(a_1, b_1] \cap (a_2, b_2] = \emptyset$*

  om och endast om
  - *$T_{j+1} - T_j$ oberoende och* Exp(λ)*-fördelade för alla j.*

Summan av oberoende Poisson-fördelade slumpvariabler

Ifall $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ *och* $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ *är oberoende slumpvariabler så är* $X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Varför? Om X_1 *och* X_2 *är oberoende slumpvariabler med värden i mängden* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *och som har frekvensfunktionerna* f_{X_1} *och* f_{X_2} Poisson-antagandet används inte ännu) *så är händelsen* $\{X_1 + X_2 = n\}$ *unionen av de disjunkta händelserna* $\{X_1 = k,\ X_2 = n-k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ *så att*

$$f_{X_1+X_2}(n) = \Pr(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} \Pr(X_1 = k,\ X_2 = n-k)$$

$$\overset{X_1 \text{ och } X_2 \text{ oberoende}}{=} \sum_{k=0}^{n} \Pr(X_1 = k)\Pr(X_2 = n-k) = \sum_{k=0}^{n} f_{X_1}(k) f_{X_2}(n-k).$$

Om nu $X_j \sim \text{Poisson}(\lambda_j)$ *så är* $f_{X_j}(k) = \mathrm{e}^{-\lambda_j}\frac{\lambda_j^k}{k!}$ *och*

$$f_{X_1+X_2}(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_j^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \overset{\text{binomialformeln}}{=} \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}.$$

Summan av två oberoende slumpvariabler mm.

- *Antag att* X *och* Y *är två oberoende slumpvariabler så att* X *har täthetsfunktionen* f_X *och* Y *har fördelningsfunktionen* F_Y. (Motsvarande resultat gäller också då X är diskret.)
- *Om* $a \le b$ *och* $A(s) \le B(s)$ *för alla* $s \in \mathbb{R}$ *så är*

$$\Pr(X \in (a,b],\ Y \in (A(X), B(X)]) = \int_a^b f_X(s)\Pr(Y \in (A(s), B(s)])\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_a^b f_X(s)\big(F_Y(B(s)) - F_Y(A(s))\big)\,\mathrm{d}s.$$

- *Slumpvariabelns* $X + Y$ *fördelningsfunktion är*

$$F_{X+Y}(t) = \Pr(X + Y \le t) = \Pr(X \in (-\infty,\infty),\ Y \le t - X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\Pr(Y \le t-s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)F_Y(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

- *Om* Y *har täthetsfunktionen* f_Y *så har* $X + Y$ *täthetsfunktionen*

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)f_Y(t-s)\,\mathrm{d}u.$$

Täthetsfunktionen för summan av oberoende Exp(λ)-slumpvariabler

Antag att $X_1, X_2, \ldots$ *är oberoende* $\text{Exp}(\lambda)$ *fördelade slumpvariabler. Vi skall visa att slumpvariabeln* $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ *har täthetsfunktionen*

$$f_{Y_n}(t) = \begin{cases} \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

När $n = 1$ *så är* $n - 1 = 0$ *och vi har exponentialfördelningens täthetsfunktion och påståendet stämmer. Om vi antar att det stämmer stämmer då* $n = k$ *så får vi (eftersom* $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}$ *och* Y_k *och* X_{k+1} *också är oberoende) att slumpvariablens* Y_{k+1} *täthetsfunktion är*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{k+1}}(t-s)f_{Y_k}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda s}s^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}s$$

$$= \lambda^{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t \frac{1}{(k-1)!}s^{k-1}\,\mathrm{d}s = \lambda^{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big/_0^t \frac{1}{k!}s^k = \frac{\lambda^{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda t}t^k}{k!},$$

och påståendet är en följd av induktionsprincipen.

Sambandet mellan exponential- och Poissonfördelningen

Antag nu att $T > 0$ *och* $U = \max\{\, n : Y_n \le T\,\}$. *Nu är* $U = k$ *om och endast om* $Y_k \le T$ *men* $Y_{k+1} > T$. *Om* A *är händelsen* $\{Y_k > T\}$ *och* $B = \{Y_{k+1} > T\}$ *så är* $A^c \cap B = B \setminus A$ *händelsen* $\{Y_k \le T$ *och* $Y_{k+1} > T\}$ *dvs.* $\{U = k\}$ *och eftersom* $X_{k+1} \ge 0$ *så är* $A \subset B$ *och*

$$\Pr(U = k) = \Pr(B) - \Pr(A) =$$

$$= \int_T^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda t}t^k}{k!}\,\mathrm{d}t - \int_T^{\infty}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{partiell integrering}}{=} -\Big/_T^{\infty}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda t}t^k}{k!} + \int_T^{\infty}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t$$

$$- \int_T^{\infty}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!}.$$

Nu är U *är* $\text{Poisson}(\lambda)$*-fördelad för då* $k = 0$ *får vi*

$$\Pr(U = 0) = \Pr(X_1 > T) = \mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda T}(\lambda T)^0}{0!}.$$

Felintensitet

Ifall X är en slumpvariabel med täthetsfunktion f_X och fördelningsfunktion F_X så är dess felintensitet (felfrekvens är något annat)

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)},$$

så att

$$F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\int_{-\infty}^{t} \lambda_X(s)\,\mathrm{d}s}$$

och *ifall λ_X är kontinuerlig från höger i punkten t,*

$$\lambda_X(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \Pr(X \in (t, t+h) \,|\, X > t),$$

dvs. om X är tiden som en apparat har fungerat och den har fungerat till tidpunkten t så är sannolikheten att den slutar fungera i nästa tidsintervall med längden h ungefär $\lambda_X(t)h$.
För exponentialfördelningen är alltså felintensiteten den positiva konstanten λ då $t \geq 0$ och 0 då $t < 0$.

Exempel

Antag att vi har möjlighet att ingå ett avtal med två olika motparter (tex. köpa mjölk i två olika butiker, ta ett mot ett erbjudet jobb) men med den begränsningen att när vi får vet de villkor den första motparten erbjuder så måste vi antingen acceptera dem utan att veta vad den andra kan erbjuda eller så acceptera den andra motpartens villkor.
Finns det någon bättre metod än att slumpmässigt välja vem vi ingår avtalet med eller att direkt välja någondera av dem?
Antag att det enda villkoret är "priset" och att i dethär fallet ett lägre pris är bättre. Dessutom antar vi att de båda priserbjudandena X och Y är oberoende positiva slumpvariabler som har samma fördelningsfunktion F och samma täthetsfunktion f.
Nu är $\Pr(X \leq Y) = \Pr(Y \leq X) = \frac{1}{2}$ vilket är en följd av att $\Pr(X < Y) = \Pr(Y < X)$ på grund av symmetrin, att $\Pr(X = Y) = 0$ eftersom X och Y är kontiuerliga och att $\Pr(X < Y$ eller $Y < X$ eller $X = Y) = 1$.

Exempel, forts.

Ett annat sätt är att använda resultatet $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s = -f(u)$, så att

$$\Pr(X < Y) = \Pr(0 < X < \infty,\, X < Y < \infty) = \int_0^\infty \int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\, f(t)\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\Big/_0^\infty \left(\int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 = 0 + \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}.$$

Om vi nu väljer det första erbjudandet med sannolikheten $q \in [0,1]$ och det andra med sannolikheten $1-q$ så väljer vi det mindre med sannolikheten $\frac{1}{2}$.
Ett bättre sätt är att vi väljer ett visst pris a och om det första erbjudandet är högst a så väljer vi det och annars väljer vi det andra erbjudandet. Sannolikheten att vi väljer det fördelaktigare alternativet är

$$p = \Pr\big((X \leq a \text{ och } X \leq Y) \quad \textit{eller} \quad (X > a \text{ och } Y \leq X)\big).$$

Händelserna $\{X \leq a \text{ och } X \leq Y\}$ och $\{X > a \text{ och } Y \leq X\}$ är disjunkta så att

Exempel, forts.

$$p = \int_0^a f(t)\left(\int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t + \int_a^\infty f(t)\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\Big/_0^a \left(\int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 + \frac{1}{2}\Big/_a^\infty \left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\int_a^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}(1 - F(a))^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}F(a)^2$$
$$= \frac{1}{2} + F(a) - F(a)^2 = \frac{1}{2} + F(a)(1 - F(a)).$$

Denhär sannolikheten är som störst $\frac{3}{4}$ om vi väljer a så att $F(a) = \frac{1}{2}$, dvs. medianen av X och Y. Men redan om $\Pr(X < a) > 0$ och $\Pr(X > a) > 0$ så är sannolikheten att vi väljer det bättre alternativet större än $\frac{1}{2}$.

Centrala gränsvärdessatsen

Ifall slumpvariablerna $X_1, X_2, \ldots$ är oberoende och har samma fördelning så att $\mathrm{E}(X_j) = \mu$ *och* $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2$, $j = 1, 2, \ldots$, *så gäller*

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim_a \mathrm{N}(0,1) \quad \text{då } n \to \infty,$$

dvs.

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le t\right) = F_{\mathrm{N}(0,1)}(t) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2}\, ds.$$

Normalapproximation

Om X är summan av "tillräckligt" många oberoende slumpvariabler med ändlig varians så är $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$ *ungefär* $\mathrm{N}(0,1)$*-fördelad.*

Binomialfördelningen och normalapproximation

Vi kastar en tärning 1500 gånger. Med vilken sannolikhet är resultatet 5 eller 6 högst 450 gånger?
Eftersom sannolikheten att resulatet är 5 eller 6 i ett kast är $\frac{1}{3}$ och om vi antar att resultaten i kasten är oberoende så får vi svaret med hjälp av binomialfördelningen och det är

$$\sum_{k=0}^{450} \binom{1500}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{1500-k}.$$

Vi kan räkna denhär summan med binomailfördelningens fördelningsfunktion `binocdf(450,1500,1/3)` *och då får vi som svar* `0.003147`.
Ett annat sätt är att använda normalapproximation: Låt $X_j = 1$ *om resulatatet i kast j är 5 eller 6 och annars 0. Om nu* $Y = \sum_{j=1}^{1500} X_j$ *så är* $\mathrm{E}(Y) = 1500 \cdot \frac{1}{3} = 500$ *och* $\mathrm{Var}(Y) = 1500 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1000}{3}$. *Enligt den centrala gränsvärdessatsen är* $\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \sim_a \mathrm{N}(0,1)$ *så att*

Binomialfördelningen och normalapproximation, forts.

$$\Pr(Y \le 450) = \Pr\left(\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le \frac{450 - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le \frac{450 - 500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}}\right) = \Pr\left(\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le -2.73861\right)$$

$$\approx F_{\mathrm{N}(0,1)}(-2.73861) = 0.003085.$$

Om frågan är med vilken sannolikhet resultatet är 5 eller 6 minst 470 och högst 520 gånger så är svaret

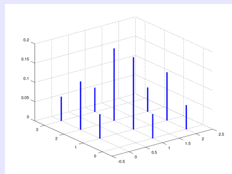
$$\Pr(470 \le Y \le 520) = \Pr\left(\frac{470 - 500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}} \le \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le \frac{520 - 500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}}\right)$$

$$= \Pr\left(-1.6432 \le \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le 1.0954\right)$$

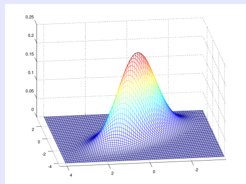
$$\approx F_{\mathrm{N}(0,1)}(1.0954) - F_{\mathrm{N}(0,1)}(-1.6432) = 0.81316.$$

Tvådimensionella slumpvariabler och fördelningar

- *Ifall Ω är ett utfallsrum på vilket en sannolikhetsfunktion är definierad så är* $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *en tvådimensionell slumpvariabel med fördelningsfunktion* $F_{XY}(s,t) = \Pr(X \le s, Y \le t)$ *förutsatt att* $\{\, \omega \in \Omega : X(\omega) \le s,\ Y(\omega) \le t \,\}$ *är en mängd för vilken sannolikheten är definierad.*
- *En tvådimensionell slumpvariabel (X, Y) är diskret och den har frekvensfunktionen* $f_{XY}(a,b)$ *ifall* $f_{XY}(a,b) \ge 0$ *för alla a och b,* $\sum_a \sum_b f_{XY}(a,b) = 1$ *och* $\Pr(X = a, Y = b) = f_{XY}(a,b)$ *för alla a och b.*



- *En tvådimensionell slumpvariabel (X, Y) är kontinuerlig och har täthetsfunktion* $f_{XY}(s,t)$ *ifall* $f_{XY}(s,t) \ge 0$ *för alla s och t,* $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(s,t)\, ds\, dt = 1$ *och* $F_{XY}(s,t) = \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f_{XY}(u,v)\, du\, dv$ *för alla s och t.*



Marginalfördelningar

- *Ifall $f_{XY}(a,b)$ är frekvensfunktionen för* *den diskreta tvådimensionella slumpvariabeln (X,Y) så är marginalfrekvensfunktionerna för slumpvariablerna X och Y*

$$f_X(a) = \Pr(X = a) = \sum_b f_{XY}(a,b) \quad \textit{och}$$

$$f_Y(b) = \Pr(Y = b) = \sum_a f_{XY}(a,b).$$

- *Ifall $f_{XY}(s,t)$ är täthetsfunktionen för* *den kontinuerliga tvådimensionella slumpvariabeln (X,Y) så är marginaltäthetsfunktionerna för slumpvariablerna X och Y*

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(s,t)\,dt \quad \textit{och} \quad f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(s,t)\,ds.$$

Väntevärden

Om (X,Y) är en tvådimensionell slumpvariabel och $h(x,y)$ är en *mätbar* *funktion så är*

$$\mathrm{E}\big(h(X,Y)\big) = \sum_a \sum_b h(a,b) f_{XY}(a,b),$$

då (X,Y) är en diskret slumpvariabel och summan existerar och

$$\mathrm{E}\big(h(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(s,t) f_{XY}(s,t)\,ds\,dt,$$

då (X,Y) är en kontinuerlig slumpvariabel med tähetsfunktion och integral existerar.

Oberoende slumpvariabler

- *Om (X,Y) är en tvådimensionell slumpvariabel (diskret eller kontinuerlig med täthetsfunktion) så gäller*

$$X \textit{ och } Y \textit{ är oberoende} \quad \Leftrightarrow \quad f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

- *Om X och Y är oberoende och f och g är* *mätbara* *funktioner så gäller*

$$\mathrm{E}(f(X)g(Y)) = \mathrm{E}(f(X))\mathrm{E}(g(Y)).$$

Kovarians och korrelation

- *Kovarians* *då $\mathrm{Var}(X) < \infty$ och $\mathrm{Var}(Y) < \infty$:*
  $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))\big) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$
- *Korrelation eller korrelationskoefficient:*
  $\mathrm{Cor}(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}, \quad -1 \le \mathrm{Cor}(X,Y) \le 1$
  då $0 < \mathrm{Var}(X) < \infty$ och $0 < \mathrm{Var}(Y) < \infty$.
- *Om X och Y är oberoende är $\mathrm{Cor}(X,Y) = 0$ men om korrelationen är 0 så är X och Y inte nödvändigtvis oberoende, om inte (X,Y) är normalfördelad.*

Exempel: Randfördelningar

Vi singlar slant 4 gånger. Låt X vara antalet kronor i de 2 första kasten och Y antalet klavor i de 3 sista kasten. Vad är korrelationen mellan X och Y? Slumpvariabelns (X,Y) frekvensfunktion är

$f_{XY}(x,y)$		Y			
		0	1	2	3
X	0	0	0.0625	0.125	0.0625
	1	0.0625	0.1875	0.1875	0.0625
	2	0.0625	0.125	0.0625	0

Nu är randfördelningarna av X och Y följande:

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.25	0.5	0.25

och

y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	0.125	0.375	0.375	0.125

Exempel: Randfördelningar, korrelation, forts.

Dethär betyder att

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 0\cdot 0.25 + 1\cdot 0.5 + 2\cdot 0.25 = 1,\\
\mathrm{E}(Y) &= 0\cdot 0.125 + 1\cdot 0.375 + 2\cdot 0.375 + 3\cdot 0.125 = 1.5,\\
\mathrm{Var}(X) &= 0^2\cdot 0.25 + 1^2\cdot 0.5 + 2^2\cdot 0.25 - 1^2 = 0.5,\\
\mathrm{Var}(Y) &= 0^2\cdot 0.125 + 1^2\cdot 0.375 + 2^2\cdot 0.375 + 3^2\cdot 0.125 - 1.5^2 = 0.75.
\end{aligned}$$

Dessutom är

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3} xyf_{XY}(x,y) &= 0 + 1\cdot 1\cdot 0.1875 + 1\cdot 2\cdot 0.1875\\
&+ 1\cdot 3\cdot 0.0625 + 2\cdot 1\cdot 0.125 + 2\cdot 2\cdot 0.0625 = 1.25
\end{aligned}$$

Därför blir korrelationen

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{E}(XY) - E(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{1.25 - 1\cdot 1.5}{\sqrt{0.5\cdot 0.75}} = -0.40825.$$

Exempel: Randfördelningar, korrelation, forts.

I Matlab/Octave kan vi räkna samma räkningar på följande sätt:
Först definierar vi frekvensfunktionen med kommandot

```
f=[0 0.0625 0.125 0.0625; 0.0625 0.1875 0.1875 0.0625;
0.0625 0.125 0.0625 0]
```

Sedan räknar vi slumpvariablernas X och Y frekvensfunktioner

```
fx=sum(f'), fy=sum(f)
```

Vi bestämmer också variablernas värden

```
x=[0 1 2], y=[0 1 2 3]
```

Sean räknar vi ut $\mathrm{E}(X)$ *och* $\mathrm{E}(Y)$

`ex=x*fx', ey=y*fy'` *(eller* `ex=sum(x.*fx), ey=sum(y.*fy)`*)*

och varianser $\mathrm{Var}(X)$ *och* $\mathrm{Var}(Y)$

```
vx=x.^2*fx'-ex^2, vy=y.^2*fy'-ey^2
```

och $\mathrm{E}(XY)$

```
exy=x*f*y'
```

så att vi som korrelationskoefficient får

```
corXY=(exy-ex*ey)/sqrt(vx*vy).
```


Betingade fördelningar

- *Ifall (X,Y) är en diskret tvådimensionell slumpvariabel med frekvensfunktion $f_{XY}(a,b)$ eller en kontinuerlig tvådimensionell slumpvariabel med täthetsfunktion $f_{XY}(s,t)$ så är*

$$f_{Y|X}(b|a) = \frac{f_{XY}(a,b)}{f_X(a)}, \quad \textit{då} \quad f_X(a) > 0,$$

  den betingade frekvensfunktionen respektive täthetsfunktionen för Y givet $X = a$.
- $\mathrm{E}(Y|X=a) = \begin{cases} \sum_b bf_{Y|X}(b|a) & \textit{eller}\\ \int_{-\infty}^{\infty} tf_{Y|X}(t|a)\,\mathrm{d}t \end{cases}$
- $\mathrm{E}(Y|X)$ *är en slumpvariabel så att* $\mathrm{E}(Y|X)(\omega) = \mathrm{E}(Y|X = X(\omega))$ *då* $\omega \in \Omega$.
- $\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = \mathrm{E}(Y)$.

Exempel: Betingad fördelning

Vi singlar igen slant 4 gånger och låter X vara antalet kronor i de 2 första kasten och Y antalet klavor i de 3 sista kasten. Slumpvariabelns (X,Y) frekvensfunktion är då

$f_{XY}(x,y)$		Y			
		0	1	2	3
X	0	0	0.0625	0.125	0.0625
	1	0.0625	0.1875	0.1875	0.0625
	2	0.0625	0.125	0.0625	0

och randfördelningarna är

X	0	1	2
$f_X(x)$	0.25	0.5	0.25

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	0.125	0.375	0.375	0.125

De betingade fördelningarna får vi genom att dividera raderna och kolumnerna i tableen med fekvensfunktoionens värden med motsvarande sannolikhet i randfördelningen.

Exempel: Betingad fördelning, forts.

- *Den betingade fördelningen X under villkoret* $Y = 0$ *är*

X	0	1	2
$f_{X\|Y}(x\|0)$	0	0.5	0.5

- *Den betingade fördelningen Y under villkoret* $X = 2$ *är*

Y	0	1	2	3
$f_{Y\|X}(y\|2)$	0.25	0.5	0.25	0

Med hjälp av den betingade fördelningen kan man räkna ut betingade väntevärden, tex.

- $\mathrm{E}(X|Y=0) = 0\cdot 0 + 1\cdot 0.5 + 2\cdot 0.5 = 1.5.$
- $\mathrm{E}(Y|X=2) = 0\cdot 0.25 + 1\cdot 0.5 + 2\cdot 0.25 + 3\cdot 0 = 1.$

Exempel: Betingad fördelning, forts.

- *Det betingade väntevärdet* $\mathrm{E}(X|Y)$ *är en slumpvariabel som får värdena* $\mathrm{E}(X|Y=0)$, $\mathrm{E}(X|Y=1)$, $\mathrm{E}(X|Y=2)$ *och* $\mathrm{E}(X|Y=3)$ *med sannolikheterna* $f_Y(0)$, $f_Y(1)$, $f_Y(2)$ *ja* $f_Y(3)$ *så att dess frekvensfunktion är*

$\mathrm{E}(X\|Y)$	1.5	1.16667	0.83333	0.5
$f_{\mathrm{E}(X\|Y)}$	0.125	0.375	0.375	0.125

- *Det betingade väntevärdet* $\mathrm{E}(Y|X)$ *är en slumpvariabel som får värdena* $\mathrm{E}(Y|X=0)$, $\mathrm{E}(Y|X=1)$ *och* $\mathrm{E}(Y|X=2)$ *med sannolikheterna* $f_X(0)$, $f_X(1)$ *ja* $f_X(2)$ *så dess frekvensfunktion är*

$\mathrm{E}(Y\|X)$	2	1.5	1
$f_{\mathrm{E}(Y\|X)}$	0.25	0.5	0.25

- *Med hjälp av fördelningarna för* $\mathrm{E}(X|Y)$ *och* $E(Y|X)$ *kan vi också kontrollera att*

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) = 1 = \mathrm{E}(X) \quad \textit{och} \quad \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = 1.5 = \mathrm{E}(Y).$$

Den tvådimensionella normalfördelningen

- *Slumpvariabeln* (X,Y) *är normalfördelad om varje linjärkombination* $\alpha X + \beta Y$ *är normalfördelad.*
- *Om* (X,Y) *är normalfördelad så är också X och Y normalfördelade, dvs.* $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ *och* $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
- *Om* (X,Y) *är normalfördelad och* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ *(så att också* $\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) = 0$*) så är X och Y oberoende.*
- *Om* (X,Y) *är normalfördelad,* $\sigma_X^2 > 0$, $\sigma_Y^2 > 0$ *och* $\rho_{XY} \neq \pm 1$ *så är*

$$f_{Y|X}(t|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_Y-\rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(s-\mu_X)}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\right)^2} \quad \textit{dvs.}$$

$$(Y|X=s) \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(s-\mu_X), (1-\rho_{XY}^2)\sigma_Y^2\right),$$

och motsvarande resultat gäller för $(X|Y=t)$.

- *Ifall* (X,Y) *är normalfördelad,* $\sigma_X^2 > 0$, $\sigma_Y^2 > 0$ *och* $\rho_{XY} \neq \pm 1$ *så har* (X,Y) *täthetsfunktionen*

$$f_{XY}(t,u) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\frac{(t-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(u-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-\frac{2\rho_{XY}(t-\mu_X)(u-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)}$$

Obs!

- *Om* (X,Y) *är en slumpvariabel så att X är normalfördelad och Y är normalfördelad så är inte slumpvariabeln* (X,Y) *nödvändigtvis normalfördelad.*
- *Om X och Y är oberoende normalfördelade slumpvariabler så är* (X,Y) *normalfördelad.*
- *Om* $X_j \sim \mathrm{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, \ldots, n$ *är oberoende så är* $\sum_{j=1} c_j X_j \sim \mathrm{N}\left(\sum_{j=1}^n c_j\mu_j, \sum_{j=1}^n c_j^2\sigma_j^2\right)$.

"Tillbaka till väntevärdet"

Om (X,Y) *är normalfördelad så att X och Y har samma fördelning* $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ *och korrelationskoefficienten* $\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) \neq \pm 1$ *så gäller*

$$\left|\mathrm{E}(Y|X=s) - \mu\right| = |\rho_{XY}||s-\mu| < |s-\mu|.$$