

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik

Sammanfattning, del II

G. Gripenberg

Aalto-universitetet

14 februari 2014

💡 Mätskalor

- *Nominalskala: Olika grupper utan naturlig ordning.*
- *Ordinalskala: Olika grupper med en naturlig ordning.*
- *Intervallskala: Numeriska värden, skillnader meningsfulla, nollan godtycklig.*
- *Kvotskala: Numeriska värden, naturligt nollvärde.*

💡 Stickprov

- *Målsättningen är att få information om slumpvariabeln X som inte behöver vara reell.*
- *För att få information gör man tex. n mätningar som ger resultaten x_1, x_2, \dots, x_n och man tänker att x_j är värdet av en slumpvariabel X_j .*
- *Slumpvariablerna X_1, \dots, X_n är ett stickprov av storleken n och x_1, x_2, \dots, x_n är ett observerat stickprov av storleken n .*
- *Vi antar (vanligen och utan att säga det explicit) att X_1, X_2, \dots, X_n är oberoende och har samma fördelning, som är fördelningen av den slumpvariabel vi är intresserade av.*

Obs!

Antagandet att slumpvariablerna X_j i ett stickprov förutsätter att vi använder "dragning med återläggning", men detta villkor uppfylls sällan! Det finns dessutom många andra större svårigheter när man i praktiken skall ta ett stickprov och detta är ett viktigt problem!

💡💡 Aritmetiskt medelvärde

Om $X_j, j = 1, \dots, n$ är ett stickprov av slumpvariabeln X så är dess (aritmetiska) medelvärde

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

och

$$E(\bar{X}) = E(X) \quad \text{och} \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \text{Var}(X).$$

💡💡 Stickprovsvarians

Om $X_j, j = 1, \dots, n$ är ett stickprov av slumpvariabeln X så är dess stickprovsvarians

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

och (vilket är motiveringen för valet av $n-1$ istället för n i nämnaren)

$$E(S^2) = \text{Var}(X).$$

💡 χ^2 -fördelningen

Ifall $X_j \sim N(0, 1)$ är oberoende och

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

så säger vi att Y är χ^2 -fördelad med n frihetsgrader eller $Y \sim \chi^2(n)$. Då är

$$E(Y) = n \quad \text{och} \quad \text{Var}(Y) = 2n$$

och Y har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0.$$

och $f(x) = 0$ då $x < 0$.

😊 Stickprovsvarians för normalfördelningen

Om $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ är ett stickprov av en $N(\mu, \sigma^2)$ fördelad slumpvariabel så gäller för stickprovsvariansen

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1).$$

💡 t -fördelningen

Ifall $Z \sim N(0, 1)$ och $Y \sim \chi^2(m)$ är oberoende och

$$W = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{m} Y}}$$

så säger vi att W är t -fördelad med m frihetsgrader eller $W \sim t(m)$.

Då är $E(W) = 0$ om $m > 1$ och $\text{Var}(W) = \frac{m}{m-2}$ om $m > 2$ och täthetsfunktionen för W är

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

💡💡 Stickprov av normalfördelningen

Om $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ är ett stickprov av en $N(\mu, \sigma^2)$ fördelad slumpvariabel så är

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n} S^2}} \sim t(n-1).$$

💡 Punkttestimat och estimator

Antag att vi vet (eller tror) att X är en slumpvariabel med frekvens- eller täthetsfunktion $f(x, \theta)$ där parametern θ (som också kan vara en vektor) är okänd. Vad kan man göra för att estimerar eller skatta θ ?

- Ta ett observerat stickprov x_j , $j = 1, \dots, n$
- Räkna ut ett estimat $\hat{\theta} = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ där g är någon funktion.
- Observera att $\hat{\theta}$ är ett tal eller en vektor medan $\hat{\Theta} = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ är en slumpvariabel.
- Ibland är det funktionen g som avses med ordet estimator och ibland slumpvariabeln $\hat{\Theta}$.

😊 Intervallestimat

Istället för att bara räkna ut ett tal (eller en vektor) som estimat för en parameter kan man också räkna ut ett intervall.

💡💡 Momentmetoden

Om frekvens- eller täthetsfunktionen $f(x, \theta)$ för en sannolikhetsfördelning är sådan att θ kan skrivas som en funktion av $E(X)$, dvs. $\theta = h(E(X))$ där X har täthetsfunktionen $f(x, \theta)$ så är momentestimatorn av θ

$$\hat{\Theta} = h\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right).$$

Om parametern, eller parametrarna kan skrivas som en funktion $h(E(X), E(X^2))$ blir estimatorn på motsvarande sätt

$$\hat{\Theta} = h\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2\right).$$

💡💡 "Maximum likelihood" - metoden

Om $f(x, \theta)$ är en frekvens- eller täthetsfunktion för en sannolikhetsfördelning så är "Maximum likelihood"-estimatet av θ talet $\hat{\theta}$ sådant att

$$L(\hat{\theta}, x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{\theta} L(\theta, x_1, x_2, x_n),$$

där

$$L(\theta, x_1, x_2, x_n) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta)$$

är den sk. "likelihood"-funktionen och x_j , $j = 1, \dots, n$ är ett observerat stickprov av en slumpvariabel med frekvens- eller täthetsfunktionen $f(x, \theta)$.

I det diskreta fallet är $L(\theta, x_1, x_2, x_n)$ sannolikheten för att man då parametern är θ får det observerade stickprovet x_j , $j = 1, \dots, n$. I fallet med

täthetsfunktion är $(2h)^n L(\theta, x_1, \dots, x_n)$ för små positiva h ungefär sannolikheten att få ett observerat stickprov y_j ,

$j = 1, \dots, n$ så att $|y_j - x_j| < h$ för alla j .

💡💡 Konfidensintervall

Ett konfidensintervall med konfidensgraden α för en parameter θ i en sannolikhetsfördelning är en intervallestimator

$I(X_1, X_2, \dots, X_n) = [a(X_1, X_2, \dots, X_n), b(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ så att

$$\Pr(\theta \in I(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \alpha.$$

Oftast används också ordet konfidensintervall för intervallet

$I(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dvs. värdet av slumpvariabeln när man fått ett observerat stickprov $x_j, j = 1, \dots, n$.

Obs!

Vanligen väljer man konfidensintervallet symmetriskt så att

$$\Pr(\theta < a(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \Pr(\theta > b(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \frac{1}{2}(1 - \alpha).$$

Oftast får man nöja sig med att villkoren för konfidensintervallet gäller endast approximativt.

💡💡 Konfidensintervall för väntevärdet då $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Om X_1, X_2, \dots, X_n är ett stickprov med medelvärde \bar{X} och stickprovsvarians S^2 av en $N(\mu, \sigma^2)$ fördelad slumpvariabel så är

$$\left[\bar{X} - \sqrt{\frac{S^2}{n}} F_{t(n-1)}^{-1} \left(\frac{1+\alpha}{2} \right), \bar{X} + \sqrt{\frac{S^2}{n}} F_{t(n-1)}^{-1} \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right],$$

ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden α .

💡💡 Konfidensintervall för p då $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Om X_1, X_2, \dots, X_n är ett stickprov med medelvärde \bar{X} av en Bernoulli(p)-fördelad slumpvariabel så är

$$\left[\bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} F_{N(0,1)}^{-1} \left(\frac{1+\alpha}{2} \right), \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} F_{N(0,1)}^{-1} \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right]$$

ett **approximativt** konfidensintervall för μ med konfidensgraden α .

💡 Obs!

Ofta används beteckningen

$$t_\alpha = t_\alpha(m) = -F_{t(m)}^{-1}(\alpha),$$

vilket alltså betyder att om X är en $t(m)$ fördelad slumpvariabel så är

$$\Pr(X \leq -t_\alpha) = \Pr(X \geq t_\alpha) = \alpha \quad \text{och} \quad \Pr(|X| \geq t_\alpha) = 2\alpha.$$

Motsvarande beteckning för normalfördelningen $N(0, 1)$ är z_α .

💡 Konfidensintervall för σ^2 då $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Om X_1, X_2, \dots, X_n är ett stickprov med stickprovsvarians S^2 av en $N(\mu, \sigma^2)$ fördelad slumpvariabel så är

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{F_{\chi^2(n-1)}^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}, \frac{(n-1)S^2}{F_{\chi^2(n-1)}^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \right]$$

ett konfidensintervall för σ^2 med konfidensgraden α .

Hypotesprövning

- Man prövar om det finns skäl att förksasta en hypotes H_0 , nollhypotesen, och i stället acceptera dess alternativ H_1 .
- För att kunna göra några beräkningar måste man som nollhypotes välja ett tillräckligt entydigt påstående, tex. $\theta = \theta_0$ och inte $\theta \neq \theta_0$ som är för diffust. Oftast räcker det om nollhypotesen har ett entydigt extrempall, tex. $\theta \leq \theta_0$.
- I nollhypotesen ingår oftast många andra antaganden om fördelningar, oberoende osv. som kan ha stor betydelse för resultatet.
- När man tagit ett stickprov räknar man ut en testvariabel vars fördelning man åtminstone approximativt känner till.
- Med stöd av nollhypotesen räknar man ut sannolikheten, det sk. **p-värdet**, för att testvariabeln får ett minst lika "extremt" värde i förhållande till nollhypotesen som det observerade stickprovet gav.
- Om p-värdet är mindre än en given **signifikansnivå** förkastar man nollhypotesen och accepterar den alternativa hypotesen H_1 .
- Signifikansnivån är alltså sannolikheten för att man förkastar nollhypotesen trots att den gäller.

💡💡 Normalfördelning, H_0 : Väntevärde = μ_0

• $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ antas vara ett stickprov av X där $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

• $H_0 : \mu = \mu_0$.

• Testvariabel: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t(n-1)$.

• p -värde: $2F_{t(n-1)}\left(-\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}\right)$.

• Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden $(-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ där

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = -F_{t(n-1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F_{t(n-1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

💡💡 Normalfördelning, H_0 : Väntevärde $\leq \mu_0$ (eller $\geq \mu_0$)

- $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ antas vara ett stickprov av X där $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ (eller $\mu \geq \mu_0$).
- Testvariabel: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t(n-1)$.
- p -värde: $F_{t(n-1)}\left(-\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}\right)$ (eller $F_{t(n-1)}\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}\right)$).
- Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden (t_α, ∞) (eller $(-\infty, t_\alpha)$) där $t_\alpha = -F_{t(n-1)}^{-1}(\alpha) = F_{t(n-1)}^{-1}(1 - \alpha)$.

💡💡 Andel eller sannolikhet, $H_0: p = p_0$

- $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ antas vara ett stickprov av X där $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
- $H_0: p = p_0$.

- Testvariabel: $Z = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim_a N(0, 1)$.

- Approximativt p -värde: $2F_{N(0,1)}\left(-\frac{|\bar{X} - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)$

- Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden $(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ där

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = -F_{N(0,1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F_{N(0,1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

- Alternativt exakt med p -värdet

$$1 - F_{\text{Bin}(n,p)}(n(p_0 + |\bar{X} - p_0|) - 1) + F_{\text{Bin}(n,p)}(n(p_0 - |\bar{X} - p_0|)).$$

- Likadana modifieringar för ensidiga hypoteser som för väntevärdet av en normalfördelad slumpvariabel.

😊 Normalapproximation

- $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ antas vara ett stickprov av X med en fördelning så att $f(X_1, \dots, X_n) \sim_a N(\theta, \sigma^2)$.
- $H_0 : E(f(X_1, \dots, X_n)) = \theta_0$.
- Testvariabel: $Z = \frac{f(X_1, \dots, X_n) - \mu_0}{\hat{\sigma}} \sim_a N(0, 1)$ där $\hat{\sigma}$ är något estimat av σ när H_0 gäller.
- Approximativt p -värde: $2F_{N(0,1)}\left(-\frac{|f(X_1, \dots, X_n) - \theta_0|}{\hat{\sigma}}\right)$.
- Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden $(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ där $z_{\frac{\alpha}{2}} = -F_{N(0,1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F_{N(0,1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

💡💡 Normalfördelning, två stickprov, samma varians, H_0 : Samma väntevärde

- $X_j, j = 1, 2, \dots, n_x$ och $Y_j, j = 1, 2, \dots, n_y$ antas vara stickprov av $X \sim N(\mu_x, \sigma^2)$ och $Y \sim N(\mu_y, \sigma^2)$ och alla slumpvariabler är oberoende.
- $H_0 : \mu_x = \mu_y$.

- Testvariabel: $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2} \cdot \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \sim t(n_x + n_y - 2)$.

- p -värde: $2F_{t(n_x+n_y-2)} \left(-\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2} \cdot \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \right)$

- Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden $(-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ där $t_{\frac{\alpha}{2}} = -F_{t(n_x+n_y-2)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F_{t(n_x+n_y-2)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Två andelar eller sannolikheter

- $X_j, j = 1, 2, \dots, n_x$ och $Y_j, j = 1, \dots, n_y$ antas vara ett stickprov av X och Y där $X \sim \text{Bernoulli}(p_x)$ och $Y \sim \text{Bernoulli}(p_y)$.

- $H_0 : p_x = p_y$ (eller $p_x \leq p_y$).

- Testvariabel: $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\hat{P}(1 - \hat{P})\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \sim_a N(0, 1)$ där

$$\hat{P} = \frac{n_x \bar{X} + n_y \bar{Y}}{n_x + n_y}.$$

- Approximativt p -värde: $2F_{N(0,1)}\left(-\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}}\right)$
 $\left(\text{eller } F_{N(0,1)}\left(-\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}}\right)\right)$.

- Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden $(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ där $z_{\frac{\alpha}{2}} = -F_{N(0,1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F_{N(0,1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ (eller i mängden (z_{α}, ∞)).

💡 Anpassning eller "Goodness-of-fit"

- $X_j, j = 1, \dots, n$ antas vara ett stickprov av en slumpvariabel med värdemängd $\cup_{k=1}^m A_k$ där mängderna A_k är disjunkta.
- $H_0 : \Pr(X \in A_k) = p_k, k = 1, \dots, m.$
- Testvariabel: $C = \sum_{k=1}^m \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \sim_a \chi^2(m-1)$ där $E_k = np_k$ och O_k är antalet element i $\{j : X_j \in A_k\}$.
- p -värde: $1 - F_{\chi^2(m-1)}(c)$
- Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden $(F_{\chi^2(m-1)}^{-1}(1 - \alpha), \infty)$.
- Om $p_k = p_k(\theta_1, \dots, \theta_j)$ och dessa parametrar estimeras med stickprovet så gäller $C \sim_a \chi^2(m - j - 1)$.

😊 Obs!

Om X_j , $j = 1, \dots, n$ är ett stickprov av en Bernoulli(p)-fördelad

slumpvariabel så är $\left(\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)^2 = \sum_{k=0}^1 \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$ där $E_0 = (1-p)n$,

$E_1 = pn$, $O_0 = n - \sum_{j=1}^n X_j$ och $O_1 = \sum_{j=1}^n X_j$, dvs. de förväntade och observerade antalen nollor och ettor.

💡 Oberoende

- X_j , $j = 1, \dots, n$ antas vara ett stickprov av en slumpvariabel med värdemängd $\cup_{i=1}^r \cup_{k=1}^c A_{i,k}$ där mängderna $A_{i,k}$ är disjunkta.
- $H_0 : \Pr(X \in A_{i,k}) = p_i p_k$, $i = 1, \dots, r$ och $k = 1, \dots, c$.
- Testvariabel: $C = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^c \frac{(O_{i,k} - E_{i,k})^2}{E_{i,k}} \sim_a \chi^2((r-1)(c-1))$ där $O_{i,k}$ är antalet element i $\{j : X_j \in A_{i,k}\}$ och $E_{i,k} = \frac{1}{n} (\sum_{m=1}^c O_{i,m}) (\sum_{m=1}^r O_{m,k})$.
- p -värde: $1 - F_{\chi^2((r-1)(c-1))}(c)$
- Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden $(F_{\chi^2((r-1)(c-1))}^{-1}(1-\alpha), \infty)$.

😊 F-fördelningen

Ifall $Y \sim \chi^2(m)$ och $X \sim \chi^2(n)$ så är $\frac{\frac{1}{m}Y}{\frac{1}{n}X} \sim F(m, n)$, dvs. följer

F-fördelningen med parametrarna (eller frihetsgraderna) m och n .

Täthetsfunktionen för denna fördelning är $f_{F(m,n)}(x) = \frac{1}{x B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \sqrt{\frac{(mx)^m n^n}{(m+x)^{m+n}}}$ där $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

😊 Varianser

- $X_j, j = 1, 2, \dots, n_x$ och $Y_j, j = 1, 2, \dots, n_y$ antas vara stickprov av $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ och $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ och alla slumpvariabler är oberoende.
- $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$.
- Testvariabel: $F = \frac{S_y^2}{S_x^2} \sim F(n_y - 1, n_x - 1)$.
- p -värde: $2(1 - F_{F(n_y-1, n_x-1)}\left(\frac{s_y^2}{s_x^2}\right))$ om $\frac{s_y^2}{s_x^2} \geq 1$ och
 $2F_{F(n_y-1, n_x-1)}\left(\frac{s_y^2}{s_x^2}\right)$ om $\frac{s_y^2}{s_x^2} \leq 1$.
- Hypotesen förkastas på signifikansnivån α om $p < \alpha$ dvs. om testvariabeln får ett värde i mängden $(-\infty, F_{F(n_y-1, n_x-1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)) \cup (F_{F(n_y-1, n_x-1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \infty)$.
- I detta fall är antagandet beträffande normalfördelning viktigt!

💡💡 Korrelation

Korrelationskoefficienten mellan slumpvariablerna X och Y är

$$\rho_{XY} = \text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}},$$

och om (X_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$ är ett stickprov av slumpvariabeln (X, Y) så är **stickprovskorrelationskoefficienten**

$$R_{XY} = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2 S_y^2}},$$

där

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y}),$$

och

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2.$$

💡 Stickprovskorrelationskoefficientens fördelning

- Ifall (X_j, Y_j) , $i = 1, \dots, n$ är ett stickprov av en normalfördelad slumpvariabel (X, Y) med korrelationskoefficient $\rho_{xy} = 0$ (och $\sigma_x^2 > 0$ och $\sigma_y^2 > 0$) så gäller

$$\frac{R_{XY}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{XY}^2}} \sim t(n-2).$$

- Ifall (X_j, Y_j) , $i = 1, \dots, n$ är ett stickprov av en normalfördelad slumpvariabel (X, Y) med $-1 < \rho_{xy} < 1$ (och $\sigma_x^2 > 0$ och $\sigma_y^2 > 0$) så gäller

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + R_{XY}}{1 - R_{XY}} \right) \sim_a N \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho_{XY}}{1 - \rho_{XY}} \right), \frac{1}{n-3} \right)$$

💡💡 Minsta-kvadrat-metoden då $y \approx b_0 + b_1x$

Om man antar att sambandet mellan x och y är $y \approx b_0 + b_1x$, punkterna (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, n$ är givna och man vill bestämma a och b_1 så att $\sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1x_j)^2$ minimeras så kan det av många skäl vara bra att först räkna ut $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ och $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j$ och sedan istället minimera

$$f(\tilde{b}_0, b_1) = \sum_{j=1}^n \left((y_j - \bar{y}) - \tilde{b}_0 - b_1(x_j - \bar{x}) \right)^2.$$

Eftersom $\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) = \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}) = 0$ är $f_{\tilde{b}_0}(\tilde{b}_0, b_1) = 2n\tilde{b}_0$ så optimeringsvillkoret $f_{\tilde{b}_0}(\tilde{b}_0, b_1) = 0$ ger $\tilde{b}_0 = 0$. Nu är $f_{b_1}(0, b_1) = 2 \sum_{j=1}^n (b_1(x_j - \bar{x}) - (y_j - \bar{y}))(x_j - \bar{x})$ så att ekvationen $f_{b_1}(0, b_1) = 0$ har lösningen

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}.$$

💡💡 Minsta-kvadrat-metoden, forts.

Koefficienten b_0 i uttrycket $y = b_0 + b_1x$ blir då

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

Ett annat sätt att formulera samma räkning är att definiera matrisen M

med $M(j, 1) = 1$ och $M(j, 2) = x_j$, dvs. $M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$, vektorn Y med

$Y(j, 1) = y_j$, dvs. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ och vektorn $C = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$. Funktionen som skall

minimeras då kan skrivas som

$\sum_{j=1}^n (Y(j, 1) - \sum_{k=1}^2 M(j, k)C(k, 1))^2 = \|Y - MC\|^2$. Minimipunkten uppnås därför då

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = C = (M^T M)^{-1} M^T Y$$

💡💡 Regression

- Slumpvariabeln Y antas förutom slumpen bero på variabeln x så att

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

där ε är en slumpvariabel som antas vara oberoende av x .

- Ett stickprov av Y är därför av typen (x_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$ där $\varepsilon_j = Y_j - \beta_0 - \beta_1 x_j$ är oberoende slumpvariabler med samma fördelning, som vanligen antas vara $N(0, \sigma^2)$.
- Med minsta kvadratmetoden (som är förnuftig precis då $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$) får vi följande estimatorer för β_1 , β_0 och σ^2 :

$$B_1 = \frac{S_{xy}}{S_x^2},$$

$$B_0 = \bar{Y} - B_1 \bar{x},$$

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (Y_j - B_0 - B_1 x_j)^2,$$

där $S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(Y_j - \bar{Y})$.

💡 Regression, testvariabler

- Antag att $\varepsilon_j \sim N(0, \sigma^2)$, $j = 1, \dots, n$ är oberoende och $Y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \varepsilon_j$, $j = 1, \dots, n$. Då är

$$B_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)s_x^2}\right)\right),$$

$$B_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{(n-1)s_x^2}\right),$$

$$\frac{(n-2)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

- Som testvariabler kan man använda

$$T_0 = \frac{B_0 - \beta_0}{\sqrt{S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)s_x^2}\right)}} \sim t(n-2),$$

$$T_1 = \frac{B_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{S^2}{(n-1)s_x^2}}} \sim t(n-2).$$

💡 Samband mellan estimatorerna

Av definitionerna ovan följer också att

$$S^2 = \frac{n-1}{n-2} S_y^2 (1 - R_{xy}^2),$$

$$R_{xy} = B_1 \sqrt{\frac{S_x^2}{S_y^2}},$$

och

$$\frac{B_1}{\sqrt{\frac{S^2}{(n-1)S_x^2}}} = \frac{R_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - R_{xy}^2}}.$$

Det senare resultatet visar att test av nollhypoteserna $\beta_1 = 0$ och $\rho_{xy} = 0$ ger samma resultat (då man antar normalfördelning).

Talet r_{xy}^2 , dvs. värdet av slumpvariabeln R_{xy}^2 sägs vara regressionsmodellens förklaringsgrad.

💡💡 Extrapolering

Om man har gjort mätningar av något slag och fått resultaten (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, n$ så vill man ofta veta vilket värde y skulle få om $x = x_0$. Ett sätt att räkna ut ett rimligt svar är att anta att $y \approx b_0 + b_1x$, bestämma b_0 och b_1 och sedan räkna ut $b_0 + b_1x_0$. Ett enkelt sätt att förutom att göra denna räkning också få en uppfattning om hur stort felet kan bli är att ersätta värdena x_j , $j = 1, \dots, n$ med $x_j - x_0$ och sedan i normal ordning räkna ut estimat och göra hypotesprövningar för β_0 i regressionsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1x + \varepsilon$.