MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi
Luennot, osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

2. tammikuuta 2015

Todennäköisyys?

- *Suhteellinen osuus toistoista eli empiirinen todennäköisyys: "Jos tehdas on tuottanut* 1 000 000 *kappaletta tiettyä tuotetta ja näistä* 5015 *ovat viallisia, niin todennäköisyys, että tuote on viallinen on* 0.005*".*
- *Suotuisten vaihtoehtojen osuus eli klassinen todennäköisyys: " Jos uurnassa on* 6 *mustaa ja* 4 *valkoista kuulaa ja jos poimimme umpimähkään uurnasta kuulan niin todennäköisyys, että se on musta on* $\frac{6}{6+4} = 0.6$*".*
- *Epävarmuuden mitta: "Sateen todennäköisyys ensi keskiviikkona on* 30%*."*

Satunnaiskoe, otosavaruus, alkeistapahtuma, tapahtuma, todennäköisyys

- **Satunnaiskoe**: *Heitämme noppaa kerran.*
- **Otosavaruus**: *Kokeen tulos on jokin luvuista* 1, 2, 3, 4, 5 *tai* 6 *jos katsomme silmälukua ja kaikkien mahdollisten tulosten joukko* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *on otosavaruus.*
- **Tapahtuma**: *Jokaisen otosavaruuden osajoukko on tapahtuma, esim. parillisten silmälukujen joukko* $\{2, 4, 6\}$.
- **Alkeistapahtuma**: *Jokainen otosavaruuden alkio* 1, 2, 3, 4, 5 *ja* 6 *on alkeistapahtuma.*
- **Todennäköisyys**: *Tässä tapauksessa on luonnollista, että oletamme että tapahtuman A todennäköisyys on* $\Pr(A) = \dfrac{|A|}{6}$ *missä* $|A|$ *on* A*:n alkioiden lukumäärä mutta se ei ole ainoa vaihtoehto!*

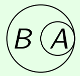
Huom!

Kun sanomme, että tapahtuma A sattuu, tarkoitamme aina sitä, että jokin tapahtumaan A kuuluva alkeistapahtuma sattuu.

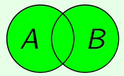
Joukko-opin kertausta

Jos A ja B $_{\text{sekä } A_j,\, j\geq 1}$ ovat tapahtumia eli otosavaruuden $\mathcal{S}$ osajoukkoja niin

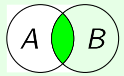
- $A \subset B$ *jos jokainen A:n alkio on B:n alkio eli alkeistapahtuma.*



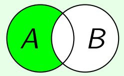
- $A \cup B = \{\, s \in \mathcal{S} : s \in A \text{ tai } s \in B \,\}$ *eli "tapahtuma A sattuu* **tai** *tapahtuma B sattuu (tai molemmat sattuvat)".*



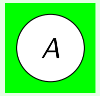
- $A \cap B = \{\, s \in \mathcal{S} : s \in A \text{ ja } s \in B \,\}$ *eli "tapahtuma A sattuu* **ja** *tapahtuma B sattuu".*



- $A \setminus B = \{\, s \in \mathcal{S} : s \in A \text{ mutta } s \notin B \,\}$ *eli "tapahtuma A sattuu mutta tapahtuma B ei satu".*



- $A^c = \mathcal{S} \setminus A = \{\, s \in \mathcal{S} : s \notin A \,\}$ *eli "tapahtuma A ei satu".*



- $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{\, s \in \mathcal{S} : s \in A_j \text{ jollakin } j \geq 1 \,\}$ *eli "ainakin jokin tapahtumista A_j sattuu".*

Satunnaiskoe, otosavaruus, tapahtuma, todennäköisyys

- **Otosavaruus** $\mathcal{S}$ *on* **satunnaiskokeen** *kaikkien mahdollisten tulosten muodostama joukko.*
- *Otosavaruuden alkio on* **alkeistapahtuma**.
- **Tapahtuma** *ovat otosavaruuden osajoukko.*
- *Jokaisella tapahtumalla A on* **todennäköisyys** $\Pr(A)$ *ja nämä todennäköisyydet toteuttavat seuraavat ehdot ($\emptyset$ on tyhjä joukko, johon ei kuulu yhtään alkiota):*
  - ★ $0 \leq \Pr(A) \leq 1$ *jokaiselle tapahtumalle A.*
  - ★ $\Pr(\mathcal{S}) = 1$.
  - ★ $\Pr(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$ *jos $A_j \cap A_k = \emptyset$ kun $j \neq k$.*

Huom!

Todennäköisyysfunktiota koskevista oletuksista seuraa myös, että (missä $\mathcal{S}$ on otosavaruus)

- ★ $\Pr(\emptyset) = 0$.
- ★ $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$.
- ★ $\Pr(A^c) = \Pr(\mathcal{S} \setminus A) = 1 - \Pr(A)$.
- ★ $A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$.

Huom!

Kun $\mathcal{S}$ sisältää äärellisen monta alkiota on luonnollista, että kaikki otosavaruuden $\mathcal{S}$ osajoukot ovat tapahtumia mutta yleisesti tämä ei ole mahdollista tai edes toivottavaa ja silloin $\Pr$ on funktio, joka on määritelty $\mathcal{S}$:n σ-algebrassa $\mathcal{A}$, eli joukossa $\mathcal{A}$ jolla on seuraavat ominaisuudet:

- $A \in \mathcal{A} \to A \subset \mathcal{S}$,
- $\mathcal{S} \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \to \mathcal{S} \setminus A \in \mathcal{A}$,
- $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots \to \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Riippumattomuus

Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia jos

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B),$$

ja tapahtumat A_j, $j \in J$ ovat riippumattomia jos

$$\Pr(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_m}) = \Pr(A_{j_1}) \cdot \Pr(A_{j_2}) \cdot \ldots \cdot \Pr(A_{j_m})$$

aina kun $j_k \in J$, $k = 1, \ldots, m$ ja $j_p \neq j_q$ kun $p \neq q$.

Huom!

Jos tapahtumat A_j, $j \in J$ ovat riippumattomia niin A_{j_p} ja A_{j_q} ovat riippumattomia kun $j_p \neq j_k$ mutta jos tapahtumat A_j, $j \in J$, ovat vain pareittain riippumattomia, eli A_{j_p} ja A_{j_q} ovat riippumattomia kaikilla $j_p \neq j_k$ niin tapahtumat A_j, $j \in J$ eivät välttämättä ole riippumattomia.

Riippumattomuus

Heitetään "virheetöntä" kolikkoa kaksi kertaa ja olkoot $A_1 = \{$ *"Ensimmäisellä heitolla kruuna"* $\}$, $A_2 = \{$ *"Toisella heitolla kruuna"* $\}$ *ja* $A_3 = \{$ *"Saadaan yksi kruuna"* $\}$. *Mitkä tapahtumat ovat riippumattomia ja mitkä eivät ole?*
Ratkaisu: Otosavaruus on tässä tapauksessa $\mathcal{S} = \{HH, HT, TH, TT\}$ *(missä siis H on kruuna ja T klaava). Tässä tapauksessa on siis* $A_1 = \{HH, HT\}$, $A_2 = \{HH, TH\}$ *ja* $A_3 = \{HT, TH\}$. *Koska kolikko oletetaan olevan virheetön niin tapahtuman* $A \subset \mathcal{S}$ *todennäköisyys on* $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\mathcal{S}|}$ *jolloin* $\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \Pr(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *ja* $\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(\{HH\}) = \frac{1}{4}$, $\Pr(A_1 \cap A_3) = \Pr(\{HT\}) = \frac{1}{4}$ *sekä* $\Pr(A_2 \cap A_3) = \Pr(\{TH\}) = \frac{1}{4}$. *Tästä nähdään, että tapahtumat* A_i *ja* A_j *ovat riippumattomia kun* $i, j \in \{1, 2, 3\}$ *ja* $i \neq j$ *koska silloin* $\Pr(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = \Pr(A_i) \cdot \Pr(A_j)$.
Mutta $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Pr(\emptyset) = 0 \neq \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2) \cdot \Pr(A_3)$ *joten tapahtumat* A_1, A_2 *ja* A_3 *eivät ole riippumattomia* *ainoastaan pareittain riippumattomia*.

Esimerkki

Jos tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, niin ovatko myös tapahtumat $A^c = \mathcal{S} \setminus A$ *ja* $B^c = \mathcal{S} \setminus B$ *riippumattomia?*
Ratkaisu: Osoitamme ensin, että A^c *ja B ovat riippumattomia.*
Määritelmän mukaan $\mathcal{S} = A \cup A^c$ *joten* $B = B \cap \mathcal{S} = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ *ja* $\Pr(B) = \Pr(B \cap A) + \Pr(B \cap A^c)$. *(Tämähän on kokonaistodennäköisyyden kaava.) Koska A ja B ovat riippumattomia niin* $\Pr(B \cap A) = \Pr(B) \cdot \Pr(A)$ *ja*

$$\Pr(B) = \Pr(B) \cdot \Pr(A) + \Pr(B \cap A^c) = \Pr(B) + \Pr(A^c \cap B).$$

josta seuraa, että

$$\Pr(A^c \cap B) = \Pr(B) - \Pr(B) \cdot \Pr(A) = (1 - \Pr(A)) \cdot \Pr(B) = \Pr(A^c) \cdot \Pr(B).$$

Nyt olemme osoittaneet oikeaksi implikaation "A ja B riippumattomia" $\rightarrow$ *"*A^c *ja B riippumattomia" ja oletuksesta, että A ja B ovat riippumattia seuraa silloin, että* A^c *ja B eli myös B ja* A^c *ovat riippumattomia jolloin implikaation nojalla saamme myös, että* B^c *ja* A^c *ovat riippumattomia.*

Ehdollinen todennäköisyys

Tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma B on sattunut on

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)},$$

olettaen, että $\Pr(B) > 0$.
Kun tapahtuma B on sattunut voimme rajoittaa otosavaruuden $\mathcal{S}$ *joukoksi B ja laskea uudet todennäköisyydet tapahtumille* $A \cap B$, *jotka ovat uuden otosavaruuden osajoukkoja.*

Ehdollisen todennäköisyyden tulosääntö

Ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä seuraa ns. tulosääntö

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B|A),$$

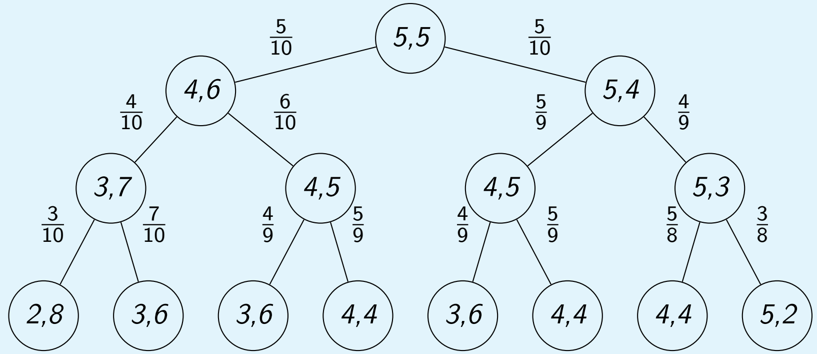
ja yleisemmin

$$\Pr(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1) \cdot \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \Pr(A_k|A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}).$$

Puuverkko apuvälineenä

Uurnassa on alunperin 5 valkoista ja 5 mustaa palloa. Nostamme satunnaisesti pallon uurnasta ja jos se on valkoinen laitamme mustan pallon uurnaan (emmekä siis laita nostettua valkoista palloa takaisin) ja jos se on musta emme laita yhtään palloa uurnaan. Toistamme tämän vielä kaksi kertaa. Mikä on todennäkösyys, että tämän jälkeen uurnassa on 6 mustaa palloa?
Ratkaisu: Tässä voimme käyttää ehdollisen todennäköisyyden tulosääntöä mutta tämä on yksinkertaisinta jos piirrämme puun siten, että kaari vasemmalle alas valitaan jos nostamme valkoisen pallon ja kaari oikealle alas valitaan jos nostamme mustan pallon. Jokaiseen solmuun kirjoitamme siinä vaiheessa uurnassa olevien valkoisten ja mustien pallojen lukumäärät ja jokaisen kaaren kohdalle kirjoitamme todennäköisyyden, että tämä kaari valitaan olettaen, että uurnassa on solmun mukaiset lukumäärät valkoisia ja mustia palloja. Silloin puu näyttää seuraavanlaiselta:

Puuverkko apuvälineenä, jatk.



Näin ollen kolmessa tapauksessa uurnassa on 6 *mustaa palloa ja näiden todennäköisyydet saamme laskemalla niihin johtavien polkujen todennäköisyyksien tulot jolloin vastaukseksi saamme laskemalla yhteen:*

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1607}{4050}\approx 0.4.$$

Bayesin kaava: Esimerkki

Eräässä maassa asuu kaksi yhtä suurta heimoa kierot ja lierot. Kieroista 60% *vastaavat kaikkiin kysymyksiin oikein ja lieroista* 80% *vastaavat kaikkiin kysymyksiin oikein. Tapaat maan asukkaan, jolta kysyt onko hän kiero vai liero ja hän vastaa olevansa kiero. Mikä on todennäköisyys, että hän todella on kiero?*

Oletamme yksinkertaisuuden vuoksi että kieroja on yhteensä 1000 *henkilöä ja lieroja samoin* 1000 *henkilöä. Silloin tiedämme, että kieroista* 600 *vastaavat kysymyksiin oikein ja sanovat olevansa kieroja. Vastaavasti lieroista* 200 *vastaavat kysymyksiin väärin, eli sanovat olevansa kieroja. Näin ollen yhteensä* 800 *henkilöä sanovat olevansa kieroja ja näistä* 600 *ovat todella kieroja joten todennäköisyys, että tapaamasi henkilö on kiero on* $\frac{600}{800}=0.75$.

Kokonaistodennäköisyys

Jos B_j, $j=1,\dots,n$ *ovat tapahtumia siten, että* $\cup_{j=1}^n B_j=\mathcal{S}$, $B_j\cap B_k=\emptyset$ *kun* $j\neq k$ *ja* $\Pr(B_j)>0$ *kun* $j=1,\dots,n$ *niin kaikille tapahtumille* A *pätee*

$$\Pr(A)=\sum_{j=1}^n \Pr(B_j)\cdot\Pr(A|B_j)$$

Miksi? Koska $A=A\cap\mathcal{S}=\cup_{j=1}^n(A\cap B_j)$ *ja* $(A\cap B_j)\cap(A\cap B_k)=\emptyset$ *kun* $j\neq k$ *niin* $\Pr(A)=\sum_{j=1}^n\Pr(A\cap B_j)$ *ja tulosäännön mukaan* $\Pr(A\cap B_j)=\Pr(B_j)\cdot\Pr(A|B_j)$.

Bayesin kaava

Jos $\cup_{j=1}^n B_j=\mathcal{S}$, $B_j\cap B_k=\emptyset$ *kun* $j\neq k$, $\Pr(B_j)>0$ *kun* $j=1,\dots,n$ *ja* $\Pr(A)>0$ *niin pätee*

$$\Pr(B_k|A)=\frac{\Pr(B_k)\cdot\Pr(A|B_k)}{\sum_{j=1}^n\Pr(B_j)\cdot\Pr(A|B_j)}.$$

Miksi?

$$\Pr(B_k|A)=\frac{\Pr(B_k\cap A)}{\Pr(A)},\quad \Pr(B_k\cap A)=\Pr(B_k)\cdot\Pr(A|B_k)\quad \textit{ja}$$

$$\Pr(A)=\sum_{j=1}^n\Pr(B_j)\cdot\Pr(A|B_j).$$

- *Bayesin kaava kuvaa miten meidän pitää päivittää käsitystämme tapahtumien* B_k *todennäköisyyksistä* $\Pr(B_k)$ *todennäköisyykseiksi* $\Pr(B_k|A)$ *kun saamme tietää, että tapahtuma* A *on sattunut.*

Bayesin kaava: Esimerkki

Eräässä maassa asuu kaksi yhtä suurta heimoa kierot ja lierot. Kierot vastaavat kaikkiin kysymyksiin oikein todennäköisyydellä 0.6 *ja lierot vastaavat kaikkiin kysymyksiin oikein todennäköisyydellä* 0.8. *Tapaat maan asukkaan, jolta kysyt onko hän kiero vai liero ja hän vastaa olevansa kiero. Mikä on todennäköisyys, että hän todella on kiero?*
Ratkaisu: Olkoon K tapahtuma, että vastaan tulee kiero ja L tapahtuma että vastaan tulee liero. Oletusten mukaan $\Pr(K) = \Pr(L) = 0.5$. *Olkoon SK tapahtuma, että vastaan tuleva henkilö sanoo olevansa kiero.*
Oletusten mukaan pätee

$$\Pr(SK|K) = 0.6 \quad \textit{ja} \quad \Pr(SK|L) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Nyt haluamme laskea $\Pr(K|SK)$ *ja Bayesin kaavan nojalla saamme*

$$\Pr(K|SK) = \frac{\Pr(SK|K)\Pr(K)}{\Pr(SK|K)\Pr(K) + \Pr(SK|L)\Pr(L)} = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75.$$

Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka

$$\Pr(A) = \frac{\textit{Tapahtuman A alkeistapahtumien lukumäärä}}{\textit{Kaikkien otosavaruuden alkeistapahtumien lukumäärä}}$$

Tässä siis oletamme, että kaikki alkeistapahtumat ovat yhtä todennäköisiä (ja että niitä on vain äärellisen monta) ja meidän pitää laskea montako alkiota kuuluu otosavaruuteen $\mathcal{S}$ ja montako näistä kuuluu joukkoon A.

Tuloperiaate

Jos valintaprosessissa on k vaihetta ja vaiheessa j on n_j vaihtoehtoa, riippumatta siitä mitä valintoja aikaisemmin on tehty (mutta vaihtoehdot saattavat riippua valinnoista) niin kaikkien vaihtoehtojen lukumäärä on

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Permutaatiot, binomikertoimet jne.

- *Jos joukossa on n alkiota voimme asettaa ne järjestykseen*
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$
eri tavalla. (Muista: $0! = 1$*)*
- *Joukosta, jossa on n alkiota, voimme valita k alkiota ja asettaa ne järjestykseen*
$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
eri tavalla.
- *Joukosta, jossa on n alkiota voimme valita osajoukon, jossa on k alkiota*
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
eri tavalla.

Kaikissa näissä tapauksissa valitsemme joukosta alkion vain kerran, eli jos poimimme kuulia uurnasta emme laita niitä takaisin.

Esimerkki

Henkilöt A, B, C, D, E ja F asettuvat peräkkäin jonoon täysin satunnaisesti. Millä todennäköisyydellä A ja B joutuvat vierekkäin?
Ratkaisu: 6 *henkilöä voivat asettua järjestykseen* $6!$ *eri tavalla eli tämä on kaikkien alkeistapahtumien lukumäärä.*
Jos A ja B asettuvat vierekkäin he ovat sijoilla $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$ *tai* $(5,6)$ *eli tässä on* 5 *vaihtoehtoa. Lisäksi he voivat asettua järjestykseen AB tai BA mikä antaa* 2 *vaihtoehtoa. Kun A ja B ovat asettuneet paikoilleen niin henkilöillä C, D, E ja F on yhteensä* $4!$ *vaihtoehtoa asettua järjestykseen jäljelle jääneille paikoille. Tuloperiaatteen nojalla henkilöt A ja B voivat asettua vierekkäin*

$$5 \cdot 2 \cdot 4!,$$

eri tavalla joten todennäköisyys, että näin käy tulee olemaan

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{3}.$$

Satunnaismuuttuja ja kertymäfunktio

Reaalinen **satunnaismuuttuja** *on funktio* $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *(siis ei varsinaisesti mikään muuttuja) missä* $\mathcal{S}$ *on jonkin kokeen otosavaruus, jossa on annettu todennäköisyys ja* $\{ s \in \mathcal{S} : X(s) \le t \}$ *on tapahtuma kaikilla* $t \in \mathbb{R}$ *eli* X *on mitallinen funktio.*

Jos X *on (reaalinen) satunnaismuuttuja niin sen kertymäfunktio on funktio*

$$F_X(t) = \Pr(X \le t) = \Pr(\{ s \in \mathcal{S} : X(s) \le t \}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funktio $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *on kertymäfunktio jos ja vain jos*

- $0 \le F(t_1) \le F(t_2) \le 1$ *kun* $t_1 < t_2$,
- $\lim_{t\to -\infty} F(t) = 0$ *ja* $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$,
- $\lim_{u\to t+} F(u) = F(t)$ *kun* $t \in \mathbb{R}$.

Tässä tapauksessa pätee lisäksi

- $\lim_{u\to t-} F(u) = \Pr(X < t)$,
- $\lim_{t\to t+} F(y) - \lim_{u\to t-} F(u) = \Pr(X = t)$.
- $F(u) - F(t) = \Pr(t < X \le u)$ *jos* $t < u$.

Huom!

Lausekkeet $X \le t$ *ja* $X < t$ *eivät muodollisesti ole tapahtumia (eli* $\mathcal{S}$*:n osajoukkoja) mutta tavallisesti kirjoitetaan* $\Pr(X \le t)$ *pitemmän lausekkeen* $\Pr(\{ s \in \mathcal{S} : X(s) \le t \})$ *sijasta.*

Riippumattomat satunnaismuuttujat

Satunnaismuuttujat X_j, $j \in J$ *joilla on sama otosavaruus eli määrittelyjoukko ovat riippumattomia jos tapahtumat* $\{ X_j \le a_j \}$, $j \in J$ *ovat riippumattomia kaikilla* $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in J$ *ja silloin myös tapahtumat* $\{ X_j \in A_j \}$, $j \in J$ *ovat riippumattomia kaikilla Borel joukoilla* A_j.

Satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma

Satunnaismuuttujan $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *todennäköisyysjakauma (tai vain jakauma) on todennäköisyysfunktio* $\Pr_X(A) = \Pr(X \in A)$ *missä* $A \subset \mathbb{R}$ *on sellainen, että* $\{ s \in \mathcal{S} : X(s) \in A \}$ *on tapahtuma eli uudeksi otosavaruudeksi otetaan* $\mathbb{R}$ *ja määritetään sen tapahtumille todennäköisyydet funktiolla* $\Pr_X$.

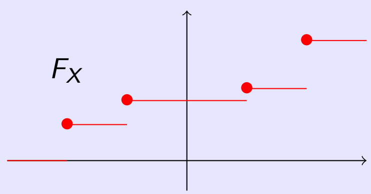
Diskreetit satunnaismuuttujat

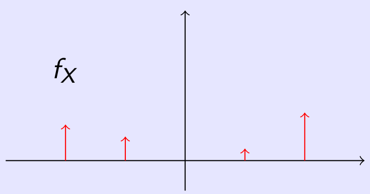
Satunnaismuuttuja X *on diskreetti jos on olemassa joukko* $A \subset \mathbb{R}$ *ja positiivisia lukuja* $f_X(a)$, $a \in A$ *siten, että*

$$F_X(t) = \sum_{\substack{a \le t \\ a \in A}} f_X(a).$$

Tästä seuraa, että $\Pr(X = a) = f_X(a)$ *kun* $a \in A$ *ja* $\sum_{a\in A} f_X(a) = 1$ *joten* $\Pr(X \notin A) = 0$ *ja joukossa* A *on korkeintaan numeroituvan monta alkiota ja voimme olettaa, että* $f_X(t) = 0$ *kun* $t \notin A$.

f_X *on diskreetin satunnaismuuttujan* X **pistetodennäköisyysfunktio**.



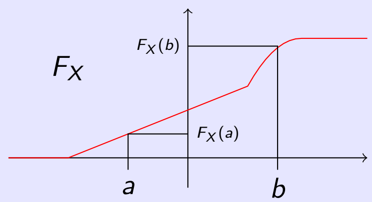


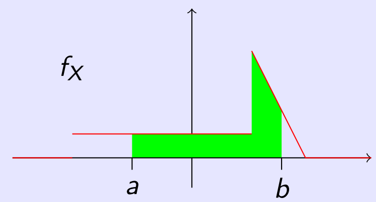
Jatkuvat satunnaismuuttujat

Satunnaismuuttuja X *on jatkuva jos sen kertymäfunktio on jatkuva eli* $\Pr(X = a) = 0$ *kaikilla* $a \in \mathbb{R}$. *Tavallisesti tehdään kuitenkin lisäoletus, että satunnaismuuttujalla* X *on* **tiheysfunktio** f_X *siten, että*

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,\mathrm{d}u.$$

Tässä tapauksessa $f_X(u) \ge 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\,\mathrm{d}u = 1$ *ja* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_X(t) = f_X(t)$.





$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Odotusarvo

Jos X on diskreetti satunnaismuuttuja niin sen odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \sum_a a \Pr(X = a) = \sum_a a f_X(a),$$

missä f_X on sen pistetodennäköisyysfunktio ja jos X:llä on tiheysfunktio f_x niin sen odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t,$$

molemmissa tapauksissa olettaen, että summa tai integraali on olemassa (eli $\sum_{a>0} a f_X(a) < \infty$ tai $\sum_{a<0} |a| f_X(a) < \infty$ ja $\int_0^\infty t f_X(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ tai $\int_{-\infty}^0 |t| f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$), muuten kirjoitetaan $\mathrm{E}(X) = NaN$ ja sanotaan ettei tällä satunnaismuuttujalla ole odotusarvoa.

Veto tai vedonlyöntisuhde (odds) ja Bayesin kaava

Oleta, että osallistut rahapeliin, jossa voitat ja saat vastapeluriltasi yhden euron todennäköisyydellä p ja häviät ja annat vastapelurillesi v euroa todennäköisyydellä $1 - p$. Millä v:n arvolla kyseessä on reilu peli?
Voittosi (ja häviösi) on satunnaismuuttuja X joka saa arvon 1 todennäköisyydellä p ja arvon $-v$ todennäköisyydellä $1 - p$ ja vastapelurisi voitto on $-X$. Nyt järkevä reiluuden kriiteri on että molempien voiton odotusarvo on 0, eli $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot p - v \cdot (1 - p) = 0$ josta saadaan

$$v = \frac{p}{1-p},$$

joka on pelin **veto** *tai vedonlyöntisuhde (eng. odds) sinun kannaltasi.*
Tämä käsite tulee myös vastaan Bayesin kaavan yhteydessä seuraavalla tavalla: Jos B on jokin tapahtuma niin sen veto on $\frac{\Pr(B)}{Pr(B^c)} = \frac{\Pr(B)}{1 - \Pr(B)}$.
Jos tiedämme, että tapahtuma A on sattunut niin saamme Bayesin kaavan nojalla päivitetyn vedon tapahtumalle B olettaen, että A on sattunut, eli

$$\frac{\Pr(B|A)}{\Pr(B^c|A)} = \frac{\Pr(A|B)}{\Pr(A|B^c)} \cdot \frac{\Pr(B)}{\Pr(B^c)}.$$

Satunnaismuuttujan funktion odotusarvo

Jos X on satunnaismuuttuja ja g on mitallinen funktio niin

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_a g(a) \Pr(X = a) = \sum_a g(a) f_X(a)$$

jos X on diskreetti ja

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

jos X on jatkuva satunnaismuuttuja, jolla on tiheysfunktio f_X. Erityisesti jos $g(t) = 1$ kun $t \in A$ ja $g(t) = 0$ muuten (jolloin usein kirjoitetaan $g = \mathbf{1}_A$) niin

$$\mathrm{E}(g(X)) = \Pr(X \in A),$$

eli todennäköisyydetkin voidaan esittää odotusarvoina.

Pietarin paradoksi

Saat maksua vastaan mahdollisuuden osallistua seuraavaan peliin: Heitetään kolikkoa kunnes tulee kruuna. Jos tämä tapahtuu n:nnellä heitolla saat 2^n euroa.
Miten paljon kannattaa maksaa mahdollisuudesta osallistua tähän peliin? Todennäköisyys, että ensimmäinen kruuna tulee n:nnellä heitolla on 2^{-n} (ainoa mahdollisuus on $n - 1$ klaavaa ja sitten kruuna), joten voiton odotusarvo on

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Pr(\textit{kruuna n:nnellä heitolla}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

On monta syytä miksi ei ole järkevää maksaa mitä tahansa jotta tähän peliin saisi osallistua (tai yleensä lähteä mukaankin), ja tämä esimerkki osoittaakin ettei odotusarvo ole kaikkiin tilanteisiin sopiva käsite.

Varianssi ja standardipoikkeama

Jos satunnaismuuttujalla X on äärellinen odotusarvo niin sen **varianssi** *on*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big),$$

ja sen **standardipoikkeama** *eli* **keskihajonta** *on*

$$\mathrm{D}(X) = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Keskihajonnan etu varianssiin nähden on, että sen mittayksikkö on sama kuin X:n ja $\mathrm{D}(\alpha X) = |\alpha|\mathrm{D}(X)$.

Odotusarvo on lineaarinen ja monotoninen

Jos X_1 ja X_2 ovat kaksi (samalla otosavaruudella määriteltyä) satunnaismuuttujaa, joilla on äärelliset odotusarvot niin

$$\mathrm{E}(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1\mathrm{E}(X_1) + c_2\mathrm{E}(X_2),$$

ja jos lisäksi $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$ *niin*

$$\mathrm{E}(X_1) \leq \mathrm{E}(X_2).$$

Tästä seuraa erityisesti, että (missä $\mathbf{1}$ *on satunnaismuuttuja joka saa todennäköisyydellä 1 arvon 1)*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}(X))^2\big) = \mathrm{E}\big(X^2 - 2X\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2\big)\\ &= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2\mathrm{E}(\mathbf{1}) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Summan varianssi

Jos X_1 ja X_2 ovat (saman otosavaruuden) **riippumattomia** *satunnaismuuttujia niin*

$$\mathrm{Var}(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1^2\mathrm{Var}(X_1) + c_2^2\mathrm{Var}(X_2).$$

ja yleisessä tapauksessa (olettaen, että varianssit ovat äärellisiä)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(c_1X_1 + c_2X_2) &= c_1^2\mathrm{Var}(X_1)\\ &\quad + 2c_1c_2\mathrm{E}\big((X_1 - \mathrm{E}(X_1))(X_2 - \mathrm{E}(X_2))\big) + c_2^2\mathrm{Var}(X_2).\end{aligned}$$

Tsebysovin epäyhtälö

$$\Pr\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) \leq \frac{1}{k^2}, \quad k > 1.$$

Miksi?

Olkoon $g(t) = 1$ *jos* $\frac{|t-\mathrm{E}(X)|}{k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \geq 1$ *ja 0 muuten. Näin ollen* $\mathrm{E}(g(X)) = \Pr(|X - \mathrm{E}(X)| \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(X)})$. *Nyt pätee* $g(t) \leq \left(\frac{|t-\mathrm{E}(X)|}{k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)^2$ *koska $g(t)$ on 0 jos oikea puoli on pienempi kuin 1 joten*

$$\begin{aligned}\Pr\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) &= \mathrm{E}(g(X))\\ &\leq \mathrm{E}\left(\left(\frac{|X-\mathrm{E}(X)|}{k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)^2\right) = \frac{1}{k^2}\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)} = \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

Kvantiilit

Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio on F_X ja $0 < p < 1$.

- *Jos F_X:llä on käänteisfunktio, niin $x_p = F_X^{-1}(p)$ on satunnaismuuttujan X ja sen jakauman* **kvantiili** *kertalukua p.*
- *Yleisesti, x_p on* **kvantiili** *kertalukua p jos*

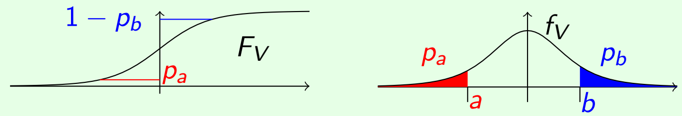
$$\Pr(X < x_p) \le p \le \Pr(X \le x_p),$$
$$\Pr(X > x_p) \le 1 - p \le \Pr(X \ge x_p).$$

- **Mediaani** *on kvantiili kertalukua 0.5.*
- *Kvantiilit eivät välttämättä ole yksikäsitteisiä mutta ne ovat aina olemassa.*

Kvanttiilit, jatk.

Monessa tilastomatemaattisessa laskussa muodostamme ensin "testimuuttujan" V, jonka kertymäfunktio F_V ja tiheysfunktio f_V on tunnettu (ainakin approksimatiivisesti). Sitten laskemme luvut a ja b siten, että $\Pr(V < a) = p_a$ ja $\Pr(V > b) = p_b$ missä useimmiten $p_a = p_b$ mutta joskus toinen on 0. Olettaen, että kertymäfunktiolla on käänteisfunktio niin saamme

$$a = F_V^{-1}(p_a) \quad ja \quad b = F_V^{-1}(1 - p_b)$$



Näiden lukujen a ja b sekä testimuuttujan määritelmän avulla voimme sitten laskea ne suureet joista todella olemme kiinostuneita.
Kun V kuten tässä on jatkuva niin $\Pr(V < a) = \Pr(V \le a)$ ja $\Pr(a \le V \le b) = \Pr(a < V < b) = 1 - p_a - p_b$.

Tärkeitä jatkuvia satunnaismuuttjia ja niiden jakaumat

- *Tasainen jatkuva jakauma (missä $-\infty < a < b < \infty$):*

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le t \le b, \\ 0, & t < a \quad \text{tai} \quad t > b. \end{cases}$$

  Odotusarvo on $\frac{1}{2}(a+b)$ ja varianssi $\frac{1}{12}(b-a)^2$.
- *Normaalijakauma $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$:*

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

  Odotusarvo on μ ja varianssi σ^2.
  Kertymäfunktiolle pätee $F_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}(t) = F_{\mathrm{N}(0,1)}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$.
- *Eksponenttijakauma $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ missä $\lambda > 0$:*

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

  Odotusarvo on $\dfrac{1}{\lambda}$ ja varianssi $\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Tärkeitä diskreettisiä satunnaismuuttujia ja niiden jakaumat

- *Tasainen diskreetti jakauma:* $\Pr(X = x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *jolloin oletetaan, että $x_i \ne x_j$ kun $i \ne j$.*
- *Bernoulli-jakauma $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, $0 \le p \le 1$:*
  - $\Pr(X = 1) = p$, $\Pr(X = 0) = (1 - p)$ *eli $X(s) = 1$ kun $s \in A \subset \mathcal{S}$ ja $X(s) = 0$ kun $s \in \mathcal{S} \setminus A$ missä $\Pr(A) = p$.*
  - $\mathrm{E}(X) = p$ *ja* $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.
- *Binomijakauma $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $n \ge 0$, $0 \le p \le 1$:*
  - $\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
  - *X on n:n riippumattoman Bernoulli(p)-jakautuneen satunnaismuuttujan summa eli koe toistetaan n kertaa riippumattomin tuloksin ja tapahtuma A jolle pätee $\Pr(A) = p$, sattuu X kertaa.*
  - $\mathrm{E}(X) = np$ *ja* $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.
- *Poisson-jakauma $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $\lambda \ge 0$:*
  - $\Pr(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.
  - *Saadaan binomijakauman raja-arvona kun $n \to \infty$ ja $np \to \lambda$.*
  - $\mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Tärkeitä diskreettisiä satunnaismuuttujia ja niiden jakaumat, jatk.

- *Hypergeometrinen jakauma* $X \sim \text{HyperGeom}(N, r, n)$ $0 \le n, r \le N$:
  - *Jos uurnasta, missä on r valkoista ja $N - r$ mustaa kuulaa nostetaan satunnaisesti n kuulaa niin nostetuiksi tulleiden valkoisten kuulien lukumäärä noudattaa* $\text{HyperGeom}(N, r, n)$*-jakaumaa.*
  - $\Pr(X = k) = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
  - $E(X) = \frac{nr}{N}$, $\text{Var}(X) = \frac{nr}{N} \cdot \frac{N-r}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$.
- *Geometrinen jakauma (kaksi muunnelmaa)* $X \sim \text{Geom}(p)$, $0 < p \le 1$:
  - *Koe toistetaan kunnes tapahtuma A, jonka todennäköisyys on p, sattuu jolloin X_1 toistojen lukumäärä ja X_2 toistojen lukumäärä ennenkuin A sattuu joten $X_1 = X_2 + 1$.*
  - $\Pr(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k \ge 1$.
  - $\Pr(X_2 = k) = (1-p)^{k}p$, $k \ge 0$.
  - $E(X_1) = \frac{1}{p}$, $E(X_2) = \frac{1-p}{p}$, $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \frac{1-p}{p^2}$.

Tärkeitä diskreettisiä satunnaismuuttujia ja niiden jakaumat, jatk.

- *Negatiivinen binomijakauma* $X \sim \text{NegBin}(p, r)$, $0 < p \le 1$, $r \ge 1$:
  - *Koe toistetaan kunnes tapahtuma A, jonka todennäköisyys on p, on sattunut r kertaa ja X on toistojen lukumäärä.*
  - $\Pr(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$.
  - $E(X) = \frac{r}{p}$, $\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

Poisson- ja eksponenttijakauman välinen yhteys

Jos $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakautuneita satunnaismuuttujia, $T > 0$ ja $Y = \max\{\, k \ge 0 : X_1 + X_2 + \ldots X_k \le T \,\}$ niin $Y \sim \text{Poisson}(\lambda T)$.
Eli jos asiakkaat saapuvat palvelupisteeseen riippumattomin ja $\text{Exp}(\lambda)$-jakautunein väliajoin, niin T-pituisella aikavälillä saapuneiden asiakkaiden lukumäärä on $\text{Poisson}(\lambda T)$-jakautunut.

Poiminta takaisinpanolla ja ilman takaisinpanoa

Oletamme, että uurnassa on m mustaa ja v valkoista kuulaa ja poimimme siitä n kuulaa.

(a) *Jos jokaisen poimitun kuulan kohdalla katsomme minkävärinen se on ja laitamme sen sitten takaisin uurnaan niin käytämme takaisinpanoa, ja todennäköisyys, että poimimme mustan kuulan on joka kerralla $\frac{m}{m+v}$ joten todennäköisyys, että poimimme kaiken kaikkiaan k mustaa kuulaa on binomijakauman mukaisesti* $\binom{n}{k}\left(\frac{m}{m+v}\right)^k\left(1 - \frac{m}{m+v}\right)^{n-k}$.

(b) *Jos sen sijaan emme käytä takaisinpanoa niin todennäköisyys että poimimme mustan kuulan riippuu siitä minkävärisiä kuulia olemme jo poimineet ja todennäköisyys, että saamme k mustaa kuulaa on hypergeometrisen jakauman mukaisesti* $\dfrac{\binom{m}{k} \cdot \binom{v}{n-k}}{\binom{m+v}{n}}$.

(c) *Jos m ja v kasvavat siten, että $\frac{m}{m+v}$ pysyy vakiona niin (b)-kohdan todennäköisyys lähestyy (a)-kohdan todennäköisyyttä.*

Eksponenttijakauman unohtamisominaisuus

Olkoon X satunnaismuuttuja, joka on $\text{Exp}(\lambda)$-jakautunut. Jos $t, u \ge 0$ niin pätee

$$\Pr(X > t + u \,|\, X > u) = \Pr(X > t),$$

eli laite joka toimii ajan X on kuin uusi joka hetkellä kun se vielä toimii.
Miksi? Eksponenttijakauman kertymäfunktio on $1 - e^{-\lambda t}$ joten $\Pr(X > t + u) = 1 - F_X(t + u) = e^{-\lambda(t+u)}$, $\Pr(X > u) = e^{-\lambda u}$ ja $\{X > t + u\} \cap \{X > u\} = \{X > t + u\}$ joten

$$\Pr(X > t + u \,|\, X > u) = \frac{\Pr(X > t + u \text{ ja } X > u)}{\Pr(X > u)} = \frac{\Pr(X > t + u)}{\Pr(X > u)} = \frac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda u}} = e^{-\lambda t} = \Pr(X > t).$$

Hasardifunktio

Jos X on satunnaismuuttuja jolla on tiheysfunktio f_X ja kertymäfunktio F_X niin sen hasardifunktio on

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)},$$

jolloin

$$F_X(t) = 1 - e^{-\int_{-\infty}^{t} \lambda_X(u)\,du}$$

ja jos λ_X on oikealta jatkuva pisteessä t niin

$$\lambda_X(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \Pr(X \in (t, t+h) \,|\, X > t),$$

eli jos X on aika, jonka laite toimii, ja se on toiminut ajan t niin todennäköisyys, että se lakkaa toimimasta seuravaalla h-pituisella aikavälillä on noin $\lambda_X(t)h$.
Eksponenttijakaumalla hasardifunktio on siis positiivinen vakio λ kun $t \geq 0$ ja 0 kun $t < 0$.

Keskeinen raja-arvolause

Jos satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja niillä on sama jakauma siten, että $\mathrm{E}(X_j) = \mu$ ja $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2 < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, niin pätee

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim_a \mathrm{N}(0,1) \quad \text{kun } n \to \infty,$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = F_{\mathrm{N}(0,1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du.$$

Normaaliapproksimaatio

Jos X on "riittävän" monen riippumattoman satunnaismuuttujan summa missä jokaisen satunnaismuuttujan varianssi on äärellinen (eikä liian iso tai liian pieni) niin satunnaismuuttuja $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}X}}$ on "suurin piirtein" $\mathrm{N}(0,1)$-jakautunut.

Binomijakauma ja normaaliapproksimaatio

Heitämme noppaa 1500 kertaa. Millä todennäköisyydellä tulos on 5 tai 6 korkeintaan 450 kertaa?
Ratkaisu: Koska todennäkösyys, että tulos on 5 tai 6 yhdessä heitossa on $\frac{1}{3}$ ja koska on järkevää olettaa, että heittojen tulokset ovat riippumattomia niin vastaus saadaan binomijakauman avulla ja se on

$$\sum_{k=0}^{450} \binom{1500}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{1500-k}.$$

Voimme laskea tämän summan komennolla `binocdf(450,1500,1/3)` *jolloin tulokseksi saamme* `0.003147`. *Toinen tapa on käyttää normaaliapproksimaatiota: Olkoon $X_j = 1$ jos heiton j tulos on 5 tai 6 ja muuten 0. Jos nyt $Y = \sum_{j=1}^{1500} X_j$ niin $\mathrm{E}(Y) = 1500 \cdot \frac{1}{3} = 500$ ja $\mathrm{Var}(Y) = 1500 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1000}{3}$. Keskeisen raja-arvolauseen nojalla $\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \sim_a \mathrm{N}(0,1)$ joten*

Binomijakauma ja normaaliapproksimaatio, jatk.

$$\Pr(Y \leq 450) = \Pr\left(\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \leq \frac{450 - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right)$$
$$= \Pr\left(\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \leq \frac{450 - 500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}}\right) = \Pr\left(\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \leq -2.73861\right)$$
$$\approx F_{\mathrm{N}(0,1)}(-2.73861) = 0.003085.$$

Jos olisi kysytty millä todennäköisyydellä tulos on 5 tai 6 vähintään 470 ja enintään 520 kertaa niin tulos olisi

$$\Pr(470 \leq Y \leq 520) = \Pr\left(\frac{470 - 500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}} \leq \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \leq \frac{520 - 500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}}\right)$$
$$= \Pr\left(-1.6432 \leq \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \leq 1.0954\right)$$
$$\approx F_{\mathrm{N}(0,1)}(1.0954) - F_{\mathrm{N}(0,1)}(-1.6432) = 0.81316.$$

Kaksiulotteiset satunnaismuuttujat ja niiden jakaumat

- *Jos $\mathcal{S}$ on otosavaruus jossa on annettu todennäköisyysfunktio niin $(X, Y) : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ on kaksiulotteinen satunnasimuuttuja, jonka kertymäfunktio on $F_{XY}(t, u) = \Pr(X \leq t, Y \leq u)$ olettaen, että $\{ s \in \mathcal{S} : X(s) \leq t, Y(s) \leq u \}$ on tapahtuma otosavaruudessa kaikilla reaaliluvuilla t ja u.*
- *Kaksiulotteinen satunnaismuuttuja (X, Y) on diskreetti ja sen pistetodennäköisyysfunktio on $f_{XY}(t, u)$ jos $\Pr(X = t, Y = u) = f_{XY}(t, u) \geq 0$ kaikilla t ja u ja $\sum_t \sum_u f_{XY}(t, u) = 1$ jolloin löytyy korkeintaan numeroituvan monta lukuparia (t, u) siten, että $f_{XY}(t, y) > 0$.*
- *Kaksiulotteinen satunnaismuuttuja (X, Y) on jatkuva jos F_{XY} on jatkuva ja sillä on tiheysfunktio $f_{XY}(t, u)$ mikäli $f_{XY}(t, u) \geq 0$ kaikilla t ja u, ja $F_{XY}(t, u) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{u} f_{XY}(\tau, \nu)\, d\tau\, d\nu$ kaikilla t ja u jolloin $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(t, u)\, dt\, du = 1$.*

Reunajakaumat

- *Jos $f_{XY}(t, u)$ on diskreetin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan (X, Y) pistetodennäköisyys niin satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat ovat*

$$f_X(t) = \Pr(X = t) = \sum_u f_{XY}(t, u) \quad \text{ja}$$
$$f_Y(u) = \Pr(Y = u) = \sum_t f_{XY}(t, u).$$

- *Jos $f_{XY}(t, u)$ on jatkuvan kaksiulotteisen satunnaismuuttujan (X, Y) tiheysfunktio niin satunnaismuuttujien X ja Y reunatiheysfunktiot ovat*

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(t, u)\, du \quad \text{ja} \quad f_Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(t, u)\, dt.$$

Odotusarvot

Jos (X, Y) on kaksiulotteinen satunnaismuuttuja ja $h(x, y)$ on mitallinen funktio niin

$$E\big(h(X, Y)\big) = \sum_t \sum_u h(t, u) f_{XY}(t, u),$$

kun (X, Y) on diskreetti satunnaismuuttuja ja summa on olemassa ja

$$E\big(h(X, Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, u) f_{XY}(t, u)\, dt\, du,$$

kun (X, Y) on jatkuva satunnaismuuttuja jolla on tiheysfunktio ja integraali on olemassa.

Riippumattomat satunnaismuuttujat

Jos (X, Y) on diskreetti kaksiulotteinen satunnaismuuttuja tai jatkuva kaksiulotteinen satunnaismuuttuja, jolla on tiheysfunktio niin

$$X \text{ ja } Y \text{ ovat riippumattomia} \quad \Leftrightarrow \quad f_{XY}(t, u) = f_X(t) f_Y(u).$$

Jos X ja Y ovat riippumattomia ja f sekä g ovat mitallisia funtkioita niin

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y)).$$

Kovarianssi ja korrelaatio

- *Kovarianssi:* $\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) = E(XY) - E(X)E(Y)$, *jos* $\mathrm{Var}(X) < \infty$ *ja* $\mathrm{Var}(Y) < \infty$.
- *Korrelaatio:* $\mathrm{Cor}(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$, $-1 \leq \mathrm{Cor}(X, Y) \leq 1$ *jos* $0 < \mathrm{Var}(X) < \infty$ *ja* $0 < \mathrm{Var}(Y) < \infty$.
- *X ja Y riippumattomia* $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cor}(X, Y) = 0$, *mutta jos korrelaatio on 0 niin X ja Y eivät välttämättä ole riippumattomia, paitsi kun (X, Y) on normaalijakautunut.*

Esimerkki

Heitämme kolikkoa 3 kertaa. Olkoon X kruunojen lukumäärä kahdessa ensimmäisessä heitossa ja Y klaavojen lukumäärä kahdessa jälkimmäisessä heitossa. Mikä on X:n ja Y:n välinen korrelaatio?

Ratkaisu: Satunnaismuuttujan (X,Y) pistetodennäköisyysfunktio on

$f_{XY}(x,y)$		$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
X	0	0	0.125	0.125
	1	0.125	0.25	0.125
	2	0.125	0.125	0

Nyt $\Pr(X=0)=0.25$, $\Pr(X=1)=0.5$ *ja* $\Pr(X=2)=0.25$ *ja Y on samalla tavalla jakautunut. Näin ollen*
$E(X)=E(Y)=0\cdot 0.25+1\cdot 0.5+2\cdot 0.25=1$ *ja*
$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=0^2\cdot 0.25+1^2\cdot 0.5+2^2\cdot 0.25-1^2=0.5$. *Lisäksi*
$E(XY)=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2}xyf_{XY}(x,y)=$
$0+1\cdot 1\cdot 0.25+1\cdot 2\cdot 0.125+2\cdot 1\cdot 0.125=0.75$. *Näin ollen*

$$\mathrm{Cor}(X,Y)=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{0.75-1\cdot 1}{\sqrt{0.5\cdot 0.5}}=-0.5$$

Esimerkki, jatk.

Matlab/Octavessa voimme laskea samat laskut seuraavalla tavalla:
Määritelemme ensin pistetodennäköisyysfunktion komennolla
`f=[0 0.125 0.125; 0.125 0.25 0.125; 0.125 0.125 0]`
Sitten laskemme X:n ja Y:n pistetodennäköisyysfunktiot komennoilla
`fx=sum(f'), fy=sum(f)`
Määritelemme myös muuttjien saamat arvot
`x=[0 1 2], y=[0 1 2]`
Sitten laskemme $E(X)$ *ja* $E(Y)$
`ex=x*fx', ey=y*fy'` *(tai* `ex=sum(x.*fx), ey=sum(y.*fy)`*)*
ja varianssit $\mathrm{Var}(X)$ *ja* $\mathrm{Var}(Y)$
`vx=x.^2*fx'-ex^2, vy=y.^2*fy'-ey^2`
sekä $E(XY)$
`exy=x*f*y'`
jolloin korrelaatiokertoimeksi saamme
`corXY=(exy-ex*ey)/sqrt(vx*vy).`

Poisson-jakautuneiden satunnaismuuttujien summa

Jos $X_1\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_1)$ *ja* $X_2\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_2)$ *ovat riippumattomia satunnaismuuttujia niin* $X_1+X_2\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$.
Miksi? Jos X_1 ja X_2 ovat riippumattomia satunnaismuuttujia jotka saavat arvonsa joukosta $\{0,1,2,\ldots\}$ ja joiden pistetodennäkösyysfunktiot ovat f_{X_1} ja f_{X_2} ei käytetä vielä Poisson-oletusta) niin tapahtuma $\{X_1+X_2=n\}$ on unioni toisiaan poissulkevista tapahtumista $\{X_1=k,\,X_2=n-k\}$, $k=0,1,\ldots,n$ joten

$$f_{X_1+X_2}(n)=\Pr(X_1+X_2=n)=\sum_{k=0}^{n}\Pr(X_1=k,\,X_2=n-k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\Pr(X_1=k)\Pr(X_2=n-k)=\sum_{k=0}^{n}f_{X_1}(k)f_{X_2}(n-k).$$

Jos nyt $X_j\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_j)$ *niin* $f_{X_j}(k)=e^{-\lambda_j}\frac{\lambda_j^k}{k!}$ *joten binomikaavan nojalla*

$$f_{X_1+X_2}(n)=\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_j^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}.$$

Kahden satunnaismuuttujan summan kertymäfunktio ym.

- *Oletamme, että X ja Y ovat kaksi riippumatonta satunnaismuuttujaa ja X:llä on tiheysfunktio f_X ja Y:n kertymäfunktio on F_Y. (Vastaava tulos pätee myös jos X on diskreetti.)*
- *Jos $a\le b$ ja $A(u)\le B(u)$ kaikilla $u\in\mathbb{R}$ niin*
$$\Pr(X\in(a,b],\,Y\in(A(X),B(X)])=\int_a^b\Pr(Y\in(A(u),B(u)])f_X(u)\,du$$
$$=\int_a^b(F_Y(B(u))-F_Y(A(u)))f_X(u)\,du.$$
- *Satunnaismuuttujan $X+Y$ kertymäfunktio on*
$$F_{X+Y}(t)=\Pr(X+Y\le t)=\Pr(X\in(-\infty,\infty),\,Y\le t-X)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Pr(Y\le t-u)f_X(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}F_Y(t-u)f_X(u)\,du.$$
- *Jos Y:n tiheysfunktio on f_Y niin $X+Y$:n tiheysfunktio on*
$$f_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_Y(t-u)f_X(u)\,du.$$

Esimerkki

Oleta, että meillä on mahdollisuus tehdä sopimus kahden eri vastapuolen kanssa (esim. ostaa maitoa kahdesta eri kaupasta) mutta sillä rajoituksella, että kun kuulemme ensimmäisen vastapuolen ehdot, esim. hinta, meidän pitää joko hyväksyä ne jolloin sopimus syntyy, tai hylätä ne, jolloin meidän täytyy hyväksyä toisen vastapuolen ehdot.
Onko olemassa parempi tapa toimia tällaisessa tilanteessa kuin satunnaisesti valita kenen kanssa sopimus tehdään, tai suoraan valita toinen heistä?
Vastaus on, ainakin tietyin oletuksin, että on olemassa parempi tapa: Oletamme ensinnäkin, että ainoa ehto on "hinta" ja että tässä tapauksessa alhaisempi hinta on parempi. Lisäksi oletamme että molempien hintatarjoukset X ja Y ovat riippumattomia positiivisia satunnaisuureita, joilla molemmilla on sama kertymäfunktio F ja tiheysfunktio f.
Nyt $\Pr(X \le Y) = \Pr(Y \le X) = \frac{1}{2}$ *mikä on on perusteltavissa sillä, että symmetrian nojalla* $\Pr(X < Y) = \Pr(Y < X)$, *jatkuvuuden nojalla* $\Pr(X = Y) = 0$ *ja* $\Pr(X < Y$ *tai* $Y < X$ *tai* $X = Y) = 1$.

Esimerkki, jatk.

Toisella tavalla, käyttämällä tulosta $\frac{d}{dt}\int_t^\infty f(u)\,du = -f(u)$, *saamme*

$$\Pr(X < Y) = \Pr(0 < X < \infty,\ X < Y < \infty) = \int_0^\infty \int_t^\infty f(u)\,du\, f(t)dt$$
$$= -\frac{1}{2}\Big/_0^\infty \left(\int_t^\infty f(u)\,du\right)^2 = 0 + \frac{1}{2}\int_0^\infty f(u)\,du = \frac{1}{2}.$$

Jos nyt valitsemme ensimmäisen tarjouksen todennäköisyydellä $q \in [0,1]$ *ja toisen todennäköisyydellä* $1 - q$ *niin todennäköisyys, että valitsemme pienemmän on* $\frac{1}{2}$.
Parempi tapa on se että valitsemme tietyn hinnan a ja jos ensimmäinen tarjous on korkeintaan a niin valitsemme sen ja muuten valitsemme toisen tarjouksen. Todennäköisyys, että silloin valitsemme edullisemman tarjouksen on

$$p = \Pr\big((X \le a \text{ ja } X \le Y) \quad \text{tai} \quad (X > a \text{ ja } Y \le X)\big).$$

Tapahtumat $\{X \le a \text{ ja } X \le Y\}$ *ja* $\{X > a \text{ ja } Y \le X\}$ *ovat toisiaan poissulkevia joten*

Esimerkki, jatk.

$$p = \int_0^a \left(\int_t^\infty f(u)\,du\right) f(t)\,dt + \int_a^\infty \left(\int_0^t f(u)\,du\right) f(t)\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\Big/_0^a \left(\int_t^\infty f(u)\,du\right)^2 + \frac{1}{2}\Big/_a^\infty \left(\int_0^t f(u)\,du\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\int_a^\infty f(u)\,du\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(u)\,du\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(u)\,du\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\int_0^a f(u)\,du\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}(1 - F(a))^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}F(a)^2$$
$$= \frac{1}{2} + F(a) - F(a)^2 = \frac{1}{2} + F(a)(1 - F(a)).$$

Tämä todennäköisyys on suurimmillaan $\frac{3}{4}$ *jos pystymme valitsemaan a:n niin että* $F(a) = \frac{1}{2}$, *eli se on X:n ja Y:n mediaani. Mutta jos vain* $\Pr(X < a) > 0$ *ja* $\Pr(X > a) > 0$ *niin todennäköisyys, että teemme parhaan mahdollisen valinnan on suurempi kuin* $\frac{1}{2}$.

Ehdolliset jakaumat

- *Jos* (X, Y) *on diskreetti kaksiulotteinen satunnaismuuttuja tai jatkuva kaksiulotteinen satunnaismuuttuja, jolla on tiheysfunktio niin*

  $$f_{Y|X}(u|t) = \frac{f_{XY}(t,u)}{f_X(t)}, \quad \text{kun} \quad f_X(t) > 0,$$

  on Y:n ehdollinen pistetodennäköisyysfunktio tai tiheysfunktio ehdolla $X = t$.
- $E(Y|X = t) = \begin{cases} \sum_u u f_{Y|X}(u|t) & \text{tai} \\ \int_{-\infty}^\infty u f_{Y|X}(u|t)\,du \end{cases}$
- $E(Y|X)$ *on satunnaismuuttuja siten, että* $E(Y|X)(s) = E(Y|X = X(s))$ *kun* $s \in \mathcal{S}$.
- $E(E(Y|X)) = E(Y)$.

Reuna- ja ehdolliset jakaumat

Kaksiulotteisen diskreetin satunnaismuuttujan (X, Y) pistetodennäköisyysfunktio on annettu seuraavassa taulukossa.

$f_{XY}(x,y)$		Y			
		-5	-3	0	4
X	1	0.1	0.1	0.2	0.1
	3	0.1	0	0.1	0.1
	4	0.1	0	0.1	0

- *Laskemalla rivisummat (`sum(f')`) saadaan X:n reunajakauma:*

	1	3	4
$f_X(x)$	0.5	0.3	0.2

- *Laskemalla sarakesummat (`sum(f)`) saadaan Y:n reunajakauma:*

	-5	-3	0	4
$f_Y(y)$	0.3	0.1	0.4	0.2

Reuna- ja ehdolliset jakaumat, jatk.

Ehdolliset jakaumat saadaan jakamalla vastaava rivi tai sarake kaksiulotteisessa jakaumassa vastaavalla reunajakauman todennäköisyydellä, eli esimerkiksi:

- *X:n ehdollinen jakauma ehdolla $Y = 0$ on*

	1	3	4
$f_{X\|Y}(x\|0)$	0.5	0.25	0.25

- *Y:n ehdollinen jakauma ehdolla $X = 1$ on*

	-5	-3	0	4
$f_{Y\|X}(y\|1)$	0.2	0.2	0.4	0.2

Ehdollisesta jakaumasta voidaan laskea ehdollinen odotusarvo jolloin esimerkiksi

- $\mathrm{E}(X|Y=0) = 1\cdot 0.5 + 3\cdot 0.25 + 4\cdot 0.25 = 2.25.$
- $\mathrm{E}(Y|X=1) = -5\cdot 0.2 - 3\cdot 0.2 + 0\cdot 0.4 + 4\cdot 0.2 = -0.8.$

Reuna- ja ehdolliset jakaumat, jatk.

- *Ehdollinen odotusarvo $\mathrm{E}(X|Y)$ on satunnaismuuttuja joka saa arvot $\mathrm{E}(X|Y=-5)$, $\mathrm{E}(X|Y=-3)$, $\mathrm{E}(X|Y=0)$ ja $\mathrm{E}(X|Y=4)$ todennäköisyyksillä $f_Y(-5)$, $f_Y(-3)$, $f_Y(-0)$ ja $f_Y(4)$ joten sen jakauma on*

	2.6667	1	2.25	2
$f_{\mathrm{E}(X\|Y)}$	0.3	0.1	0.4	0.2

- *Ehdollinen odotusarvo $\mathrm{E}(Y|X)$ on satunnaismuuttuja joka saa arvot $\mathrm{E}(Y|X=1)$, $\mathrm{E}(Y|X=3)$ ja $\mathrm{E}(Y|X=4)$ todennäköisyyksillä $f_X(1)$, $f_X(3)$ ja $f_X(4)$ joten sen jakauma on*

	-0.8	-0.3333	-2.5
$f_{\mathrm{E}(Y\|X)}$	0.5	0.3	0.2

Ehdolliset jakaumat, esimerkki

Oletamme, että kaksi henkilöä, jotka eivät tunne toisiaan saapuvat samaan kadunkulmaan.

- *Mikä on toisen pituus jos heidän yhteenlaskettu pituutensa on 430 cm?*
- *Mikä on toisen voitto lotossa edellisellä viikolla jos heidän yhteenlaskettu voittonsa edellisellä viikolla on 4 miljoona euroa?*

Tässä meillä on siis kaksi riippumatonta samalla tavalla jakautunutta satunnaismuuttujaa X ja Y ja kysymys on toisen muuttujan jakaumasta ehdolla $X + Y = t$ ja erityisesti mitä jokin mielikuva tästä jakaumasta kertoo muuttujien X ja Y jakaumasta.
Olkoon $Z = X + Y$ jolloin $Y = Z - X$ ja olkoon f satunnaismuuttujan X (ja Y:n) kertymäfunktio. Silloin satunnaismuuttujan (X, Z) kertymäfunktio on

$$F_{XZ}(t,u) = \Pr(X \le t,\ Z \le u) = \Pr(X \le t,\ Y \le u - X)$$
$$= \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{u-x} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right) f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\eta = z - x}{=} \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{u} f(z-x)f(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

Ehdolliset jakaumat, esimerkki, jatk.

Tästä seuraa, että (X,Z):n tiheysfunktio on $f(x)f(z-x)$. Näin ollen satunnaismuuttujan $(X|Z=z)$, eli X ehdolla $Z=z$, tiheysfunktio on

$$f_{(X|Z)}(x|z) = \frac{f(x)f(z-x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-z)\,dt}.$$

Seuraavaksi katsomme mikä tämä jakauma on kolmessa erikoistapauksessa:

- *Jos X ja $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ niin $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ kun $t \geq 0$ ja 0 kun $t < 0$ joten*

$$f_{X|Z}(x,z) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)}}{\lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda t} e^{-\lambda(z-t)}\,dt} = \frac{1}{z}, \quad 0 \leq x \leq z,$$

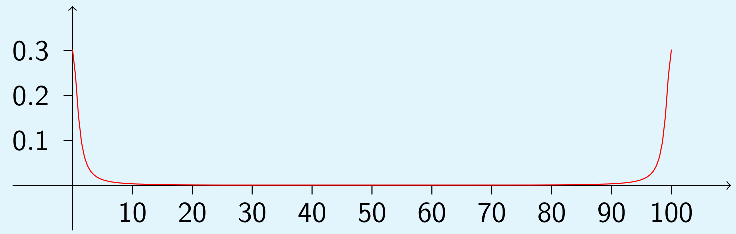
  ja $f_{X|Z}(x,z) = 0$ jos $x < 0$ tai $x > z$. Ehdollinen jakauma on siis tasajakauma välillä $[0,z]$.

Ehdolliset jakaumat, esimerkki, jatk.

- *Jos X ja $Y \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ niin $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ja mekaaninen lasku osoittaa, että*

$$(X|Z=z) \sim \mathrm{N}\left(\frac{z}{2}, \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

- *Jos X:n ja Y:n tiheysfunktio on $f(t) = \frac{2}{\pi(1+t^2)}$ kun $t > 0$ ja $f(t) = 0$ kun $t < 0$ niin numeerinen lasku osoittaa, että esimerkiksi $f_{X|Z}(x,100)$ näyttää seuraavanlaiselta:*



Kaksiulotteinen normaalijakauma

- *Satunnaismuuttuja (X,Y) on normaalijakautunut jos jokainen lineaarikombinaatio $\alpha X + \beta Y$ on normaalijakautunut.*
- *Jos (X,Y) on normaalijakautunut niin myös X ja Y ovat normaalijakautuneita, eli $X \sim \mathrm{N}(\mu_X,\sigma_X^2)$ ja $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y,\sigma_Y^2)$.*
- *Jos (X,Y) on normaalijakautunut ja $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ (ja silloin myös $\rho = \mathrm{Cor}(X,Y) = 0$) niin X ja Y ovat riippumattomia.*
- *Jos (X,Y) on normaalijakautunut, $\sigma_X^2 > 0$, $\sigma_Y^2 > 0$ ja $\rho \neq \pm 1$ niin*

  $$f_{Y|X}(u|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(t-\mu_X)}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} \quad \textit{eli}$$

  $$(Y|X=t) \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(t-\mu_X), (1-\rho^2)\sigma_Y^2\right),$$

  ja vastaava tulos pätee $(X|Y=u)$:lle.
- *Jos (X,Y) on normaalijakautunut, $\sigma_X^2 > 0$, $\sigma_Y^2 > 0$ ja $\rho \neq \pm 1$ niin (X,Y):llä on tiheysfunktio*

  $$f_{XY}(t,u) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(t-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(u-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(t-\mu_X)(u-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)}$$

Huom!

- *Jos (X,Y) on satunnaismuuttuja siten, että X on normaalijakautunut ja Y on normaalijakautunut niin satunnaismuuttuja (X,Y) ei välttämättä ole normaalijakautunut.*
- *Jos X ja Y ovat riippumattomia normaalijakautuneita satunnaismuuttujia niin (X,Y) on normaalijakautunut.*
- *Jos $X_j \sim \mathrm{N}(\mu_j,\sigma_j^2)$, $j = 1,\ldots,n$ ovat riippumattomia niin $\sum_{j=1} c_j X_j \sim \mathrm{N}\left(\sum_{j=1}^n c_j\mu_j, \sum_{j=1}^n c_j^2\sigma_j^2\right)$.*

"Paluu keskiarvoon"

Jos (X,Y) on normaalijakautunut siten, että X:llä ja Y:llä on sama jakauma $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ ja korrelaatiokerroin $\rho = \mathrm{Cor}(X,Y) \neq \pm 1$ niin

$$\left|\mathrm{E}(Y|X=t) - \mu\right| = |\rho||t-\mu| < |t-\mu|.$$