Aalto-universitetet

Gripenberg

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik
Mellanförhör 1, 2.10.2014

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. Visa med hjälp av induktion att

$$2 + 10 + 24 + \ldots + n(3n-1) = \sum_{j=1}^{n} j(3j-1) = n^2(n+1), \quad n \geq 1.$$

Lösning: Påståendet $P(n)$ är alltså att $\sum_{j=1}^{n} j(3j-1) = n^2(n+1)$.

Då $n = 1$ är $\sum_{j=1}^{n} j(3j-1) = \sum_{j=1}^{1} j(3j-1) = 1 \cdot (3-1) = 2$ och $n^2(n+1) = 1 \cdot 2 = 2$ så $P(1)$ är sant.

Antag nu att $P(k)$ gäller. Då får vi

$$\sum_{j=1}^{k+1} j(3j-1) = \sum_{j=1}^{k} j(3j-1) + (k+1)(3(k+1)-1) = k^2(k+1) + (k+1)(3k+2)$$
$$= (k+1)(k^2+3k+2) = (k+1)^2((k+1)+1)$$

eftersom $(k+1)^2((k+1)+1) = (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)(k^2+3k+2)$ så att vi ser att $P(k+1)$ också gäller.

Detta innebär att induktionsprincipen kan tillämpas och $\sum_{j=1}^{n} j(3j-1) = n^2(n+1)$ för alla $n \geq 1$.

2.

(a) Formulera påstådendet ”Ifall a och b är två rationella tal så att a är större än b så finns det ett rationellt tal c som är mindre än a och större än b” genom att använda $\forall$, $\exists$, $\rightarrow$, $\&\&$, $||$, $!$, $\in$, $<$, $>$, $\mathbb{Q}$, a, b och c och vid behov parenteser (där alltså $\mathbb{Q}$ är mängden rationella tal, $\&\&$ är ”och”, $||$ är ”eller” och ! är negation men du kan också använda $\wedge$ istället för $\&\&$, $\vee$ istället för $||$ och $\neg$ istället för !).

(b) Låt p_1 vara funktionen $p_1(n) = n$ och p_2 vara funktionen $p_2(n) = n^2$ (så att $O(p_1) = O(n)$ och $O(p_2) = O(n^2)$) . Antag att f och g är sådana att $f \in O(p_2)$ och $g \in O(p_2)$ men $f \notin O(p_1)$ och $g \notin O(p_1)$. Är det möjligt att $h \in O(p_1)$ då h är den sammansatta funktionen $h(n) = f(g(n))$? Motivera ditt svar!

Lösning: (a) $(a \in \mathbb{Q} \ \&\& \ b \in \mathbb{Q} \ \&\& \ a < b) \rightarrow \exists c(c \in \mathbb{Q} \ \&\& \ a < c \ \&\& \ c < b)$

(b) Låt tex.

$$f(n) = \begin{cases} n^2, & \text{då } n \text{ är ett jämnt tal,} \\ 0, & \text{då } n \text{ är ett udda tal,} \end{cases} \qquad \text{och} \qquad g(n) = \begin{cases} 0, & \text{då } n \text{ är ett jämnt tal,} \\ n^2, & \text{då } n \text{ är ett udda tal.} \end{cases}$$

Eftersom $\frac{|f(n)|}{n^2} \leq 1$ och $\frac{|g(n)|}{n^2} \leq 1$ då $n \geq 1$ men det inte finns några konstanter C och n_0 så att $\frac{|f(n)|}{n} \leq C$ då $n \geq n_0$ eller $\frac{|g(n)|}{n} \leq C$ då $n \geq n_0$ så ser vi att de första villkoren för f och g är uppfyllda.

Om n är ett jämnt tal så är $g(n) = 0$ vilket betyder att $f(g(n)) = 0$ och om n är ett udda tal så är $g(n)$ också ett udda tal så att $f(g(n)) = 0$ också i detta fall. Funktionen h är alltså identiskt 0 och hör därför till mängden $O(p_1)$.

---

3. Formulera följande påstående att gälla en icke-riktad graf med nodmängd X: Om X är en mängd med 6 element och W är en relation i X, dvs. en delmängd av $X \times X$ så att W är irreflexiv (dvs. $[x, x] \notin W$ för alla $x \in X$) men symmetrisk så finns det alltid en en delmängd $Y \subset X$ med 3 element så att antingen $W \cap (Y \times Y) = (Y \times Y) \setminus \{ [y, y] : y \in Y \}$ eller $W \cap (Y \times Y) = \emptyset$. Är påståendet sant? Motivera ditt svar.

Lösning: En relation i X bestämmer en riktad graf med nodmängd X och om relationen är symmetrisk så bestämmer den också en icke-riktad graf med nodmängd X. Antagandet att relationen är irreflexiv betyder att det inte finns någon båge från en nod till samma nod.

Påståendet är nu att det i en icke-riktad graf med 6 noder som är sådan att det inte finns någon båge från en nod till samma nod så finns en delmängd Y av noderna så att antingen alla noder i Y är grannnar med varandra, dvs. det finns en båge mellan dem, eller så att ingen nod i Y är granne med en annan nod i Y, dvs. det finns inte nöon båge mellan någon avd dem.

Svaret är ja vilket man kan se på följande sätt: Välj en viss nod, kalla den v_0. Det finns minst 3 andra noder (kalla dem v_j, $j = 1, 2, 3$) som antingen alla är grannar till a eller som alla inte är det är det för annars finns det högst 2 noder av vardera sorten eller tillsammans högst 4 andra noder vilket inte är sant.

Antag först att alla v_1, v_2 och v_3 är grannar med v_0. Om nu två av noderna v_1, v_2 och v_3, tex. v_1 och v_2 är garnnar med varandra så kan vi välja $Y = \{v_0, v_1, v_2\}$ så att alla noder i Y är grannar med varandra. I annat fall kan vi välja $Y = \{v_1, v_2, v_3\}$ och får en mängd Y där ingen är garnne med någon annan.

Om ingen av noderna v_1, v_2 och v_3 är granne med v_0 så finns det antingen två noder, tex. v_1 och v_2, bland v_1, v_2 och v_3 som inte är garnne med varandra och vi väljer $Y = \{v_0, v_1, v_2\}$ eller så är alla noderna v_1, v_2 och v_3 grannar med varandra och då väljer vi $Y = \{v_1, v_2, v_3\}$.

4.

(a) I en grupp med 82 studerande läser 59 en kurs i real analys och 46 läser en kurs i sannolikhetslära och 12 läser ingendera av dessa kurser. Hur många läser både kursen i real analys och den i sannolikhetslära?

(b) I en tentamen finns 12 frågor och du skall besvara 10 av dem. På hur många sätt kan detta göras om du dessutom skall besvara högst 5 av uppgifterna $1 - 6$ och minst 4 av uppgifterna $7 - 12$.

Förklara hur du resonerat. Dina svar kan innehålla multiplikationer, divisioner, additioner och fakulteter (!).

Lösning: (a) Låt S vara mängden av alla studeranden, A mängden av de som läser kursen i real analys och B mängden av de som läser sannolikhetslära. Nu är $|S| = 82$, $|A| = 59$, $|B| = 46$, och $|S \setminus (A \cup B)| = 12$. Eftersom $A \subset S$ och $B \subset S$ så är

$$12 = |S \setminus (A \cup B)| = |S| - |A \cup B| = 82 - |A \cup B|,$$

så att $|A \cup B| = 70$. Enligt inklusions-exklusionsprincipen så är

$$70 = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 59 + 46 - |A \cap B| = 105 - |A \cap B|,$$

och vi ser att $|A \cap B| = 105 - 70 = 35$.

(b) För att få ihop 10 uppgifter så att tilläggsvillkoren blir uppfyllda måste du välja 4 eller 5 uppgifter bland de 6 första och de återstående 6 eller 5 bland de fem sista. Dehär fallen ger upphov till olika val och därför blir antalet möjligheter

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{6}{6} + \binom{6}{5} \cdot \binom{6}{5} = \frac{6 \cdot 5}{2} + 6 \cdot 6 = 15 + 36 = 51.$$
