Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik — Gripenberg

Övning 2

Vecka 38, 18–21.9.2013

Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 5, 6, 14

Returnera lösningarna till I-uppgifterna senast 24.9.2013 kl. 16.30

Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1. Om X och Y är mängder, $f : X \to Y$ en funktion, $A \subset X$ och $B \subset Y$ så är

$$f(A) = \{\, y \in Y : \exists x(x \in A \;\&\; f(x) = y) \,\} \quad \text{och} \quad f^{\leftarrow}(B) = \{\, x \in X : f(x) \in B \,\}.$$

Vad kan man säga om $f^{\leftarrow}(f(A))$ och $f(f^{\leftarrow}(B))$ och vad skall man anta om f för att $f^{\leftarrow}(f(A)) = A$ och vad för att $f(f^{\leftarrow}(B)) = B$. (Ofta används beteckningen f^{-1} istället för $f^{\leftarrow}$.)

I2. En ö har formen av en liksidig triangel med en sidlängd som är mindre än 4 km. Sjutton personer har spolats upp på ön och nu vill var och en av dem bygga sig en hydda som ligger på över 1 km avstånd från varje annan hydda. Kan detta vara möjligt? Motivera ditt svar.

I3. Låt Sur(m,n) vara antalet surjektioner från en mängd A med m element till en mängd B med n element. Förklara hur och varför man kan uttrycka Sur(m,n) med hjälp av Sur$(m-1, n-1)$ och Sur$(m-1,n)$. Använd detta resultat för att räkna ut Sur$(4,2)$. (Använd inte formeln för Sur(m,n).)

Svar: 14

I4. Om A och B är två $n \times n$-matriser är produkten $A \cdot B$ av matrisen med elementen

$$(A \cdot B)(i,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k) \cdot B(k,j), \quad 1 \le i,j \le n.$$

Hur många multiplikationer (av tal) måste man räkna om man använder definitionen som sådan.

Man kan också räkna produkten av två 2×2-matriser med 7 multiplikationer. Om man nu skall multiplicera två $2m \times 2m$ matriser kan man skriva dem i formen $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix}$ där A, B, C, D, S, T, U och V är $m \times m$ matriser och för att räkna produkten av dem så räcker det att man räknar 7 produkter av $m \times m$ matriser.

Använd detta result för att bestämma ett tal a så att man med n^a multiplikationer (och ett stort antal additioner och subtraktioner) kan räkna produkten av två $n \times n$ matriser då $n = 2^p$ får något positivt heltal p.

Svar: ≈ 2.8074.

I5.

(a) Antag att X är en mängd ($\neq \emptyset$) och W en relation i X (dvs. en delmängd av $X \times X$) som är både symmetrisk och transitiv. Vad måste man ännu anta (utan att direkt anta att den är reflexiv, eller tex. transitiv) för att relationen också skall vara reflexiv?

(b) Antag att X är en mängd ($\neq \emptyset$) och $V_j \subset X$ för $j = 1, 2, \ldots, m$. Vilka villkor måste mängderna uppfylla (eller bara, räcker det att mängderna uppfyller) för att att relationen $\sim$ som man definierar med villkoret

$$a \sim b \leftrightarrow \exists j \in \{1, \ldots m\}(a \in V_j \;\&\; b \in V_j)$$

skall vara en ekvivalensrelation?

Besvara Stack-uppgifterna (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=15`)
senast 24.9.2013 kl. 16.30
