MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet
Yhteenveto, osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

3. huhtikuuta 2014

Joukot

- *Joukko-opissa peruskäsite on* $\in$ *eli* $a \in A$ *kun "alkio* a *kuuluu joukkoon* A*" ja* $a \notin A$ *kun "alkio* a *ei kuulu joukkoon* A*".*
- *Merkintätapoja:* $A = \{2, 4, 5, 8\}$ *on joukko jonka alkiot ovat* 2, 4, 5 *ja* 8 *ja* $B = \{4, 5, \ldots 2014\}$ *on joukko, jonka alkiot ovat kaikki kokonaisluvut* j *joille pätee* $4 \leq j \leq 2014$*. Usein merkitään* $A = \{\, x \in B : P(x) \,\}$ *jolloin* A*:n alkiot ovat ne joukon* B *alkiot joille väite* $P(x)$ *on tosi.*
- *Tyhjä joukko:* $\emptyset = \{\}$ *on tyhjä joukko johon ei kuulu yhtään alkiota, eli* $x \in \emptyset$ *on aina epätosi.*
- $A = B$ *kun* $x \in A$ *jos ja vain jos* $x \in B$*, eli esimerkiksi* $\{1, 2, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.
- *Ei-negatiiviset kokonaisluvut joukkoina: Jos* $\emptyset$ *on luku* 0 *niin* $\{\emptyset\}$ *on luku* 1, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ *on luku* 2, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ *on luku* 3 *jne.*

Joukko-opin perusmerkintöjä

- *Yhdiste tai unioni:* $x \in A \cup B$ *jos ja vain jos* $x \in A$ **tai** $x \in B$.
- *Leikkaus:* $x \in A \cap B$ *jos ja vain jos* $x \in A$ **ja** $x \in B$.
- *Joukkoerotus:* $x \in A \setminus B$ *jos ja vain jos* $x \in A$ **mutta** $x \notin B$.
- *Osajoukko:* $A \subset B$ *jos jokainen* A*:n alkio on myös* B*:n alkio.*
- *Yhtäläisyys:* $A = B$ *jos* $A \subset B$ *ja* $B \subset A$.
- *Komplementti:* $A^c = \Omega \setminus A$ *jos* $A \subset \Omega$ *ja on selvää mikä* Ω *on.*
- *Yhdiste tai unioni:* $x \in \cup_{j \in J} A_j$ *jos ja vain jos* $x \in A_j$ *jollakin* $j \in J$.
- *Leikkaus:* $x \in \cap_{j \in J} A_j$ *jos ja vain jos* $x \in A_j$ *kaikilla* $j \in J$.

Standardimerkintöjä

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *on luonnollisten lukujen (missä* 0 *on mukana) joukko.*
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *on kokonaislukujen joukko.*
- $\mathbb{Q} = \{\, \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \,\}$ *on rationaalilukujen joukko.*
- $\mathbb{R}$ *on reaalilukujen joukko.*

Propositiologiikka eli lausekalkyyli

Jos a ovat b lauseita tai väitteitä, jotka voivat olla tosia tai epätosia mutta ei mitään siltä väliltä niin

- *Lause $a \,\&\, b$ on tosi kun a on tosi ja b on tosi*
- *Lause $a \mid b$ on tosi kun a on tosi tai b on tosi (ja myös kun molemmat ovat tosia).*
- *Lause $!a$ on tosi kun a ei ole tosi eli a on epätosi.*
- *Lause $a \to b$ on tosi kun $(!a) \mid b$ on tosi, eli kun b on tosi tai a on epätosi.*
- *Lause $a \leftrightarrow b$ kun $(a \to b) \,\&\, (b \to a)$ on tosi.*

Matemaattisessa logiikassa käytetään yleisesti &:n sijasta $\wedge$, $\mid$:n sijasta $\vee$ ja !:n sijasta $\neg$.

Implikaatio $\to$

Logiikan lause $a \to b$ ei täysin vastaa jokapäiväisen kielenkäytön "jos a niin b" koska se on tosi kun a on epätosi eikä sillä välttämättä ole mitään tekemistä syy-seuraus syhteen kanssa.

Predikaattilogiikka

- *Lause $\forall x\, P(x)$ on tosi kun $P(x)$ on tosi kaikilla x.*
- *Lause $\exists x\, P(x)$ on tosi kun on olemassa x siten, että $P(x)$ on tosi.*

Predikaattilogiikka on lausekalkyylin laajennus, jossa operaatioden eli konnektiivien (!, &, $\mid$, $\to$ ja $\leftrightarrow$) lisäksi käytetään universaali- ja eksistenssi kvanttorit $\forall$ ("kaikilla") och $\exists$ ("on olemassa"), ja lauseiden lisäksi käytetään muuttujia $x, y, \ldots$ ja predikaatteja $P, Q, \ldots$. Predikaateilla on äärellinen määrä argumentteja, esim. $P(x)$, $Q(x, y)$, jne., ja predikaatti joiden argumenttien lukumäärä on 0 on lause.
Predikaattien lisäksi voidaan käyttää funktioita joiden arvot kuuluvat samaan käsiteltävään aihepiiriin ("domain of discourse") kuin muuttujat. Funktio, jolla ei ole muuttuja on vakio. Funkiot ja vakiot voidaan esittää predikaattien avulla, mutta se on usein kömpelö vaihtoehto.

Prioriteettijärjestys

Jos ei käytetä sulkuja, joilla tietenkin on korkein prioriteetti, niin loogiset konnektiivit evaluoidaan tavallisesti seuraavassa järjestyksessä: Ensin !, sitten $\forall$ ja $\exists$, sitten & ja $\mid$ ja lopuksi $\to$ ja $\leftrightarrow$.

$\forall x \in A$ ja $\exists x \in A$

Lauseet $\forall x \in A\,(P(x))$ ja $\exists x \in A\,(P(x))$ ovat lyhenteitä lauseista

$$\forall x\,(x \in A \to P(x)),$$
$$\exists x\,(x \in A \,\&\, P(x)),$$

ja tarkoittavat (tietenkin) että "kaikilla A:n alkiolla x pätee P(x)" ja "on olemassa A:n alkio x jolla P(x) pätee".

Negaatio !, konnektiivit & ja $\mid$ sekä kvanttorit $\forall$ ja $\exists$

Kaikilla lauseilla a ja b pätee

$$!(a \,\&\, b) \leftrightarrow\, !a \mid !b,$$
$$!(a \mid b) \leftrightarrow\, !a \,\&\, !b,$$

eli esimerkiksi $!(a \,\&\, b)$ on tosi täsmälleen silloin kun $!a \mid !b$ on tosi ja lause $!(a \,\&\, b) \leftrightarrow\, !a \mid !b$ on tautologia koska se on tosi riippumatta a:n ja b:n totuusarvoista.
Samoin kaikilla predikaateilla P pätee

$$!(\forall x(P(x))) \leftrightarrow \exists x(!P(x)),$$
$$!(\exists x(P(x))) \leftrightarrow \forall x(!P(x)).$$

Induktioperiaate

Jos $P(n)$ on väite (joka kaikilla $n \geq n_0$ on joko tosi tai epätosi) siten, että

- *$P(n_0)$ on tosi*
- *$P(k+1)$ on tosi jos $P(k)$ on tosi (eli $P(k) \to P(k+1)$ on tosi) kun $k \geq n_0$*

niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq n_0$.

Joskus on tarpeen ottaa induktio-oletukseksi väite, että $P(j)$ on tosi kun $n_0 \leq j \leq k$ sen sijaan että pelkästään oletetaan, että $P(k)$ on tosi.

Karteesinen tulo

Kahden joukon X och Y karteesinen tulo $X \times Y$ on joukko johon kuuluvat kaikki järjestetyt parit (a, b) tai $[a, b]$ missä $a \in X$ ja $b \in Y$, eli

$$X \times Y = \{ [a, b] : a \in X \text{ ja } b \in Y \}.$$

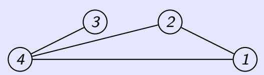
On monta tapaa määritellä järjestettyä paria $[a, b]$ ja usein käytetty tapa on sanoa, että $[a, b]$ on joukko $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Relaatiot

Relaatio joukosta X joukkoon Y (tai relaatio joukossa X jos $Y = X$) on karteesisen tulon $X \times Y$ osajoukko.

Verkko?

Verkko, eli graafi muodostuu joukosta solmuja ja joukosta niiden väilisiä kaaria (tai linkkejä), esim näin:



Suunnatussa verkossa jokaisella kaarella on lähtösolmu ja kohdesolmu kun suuntaamattomassa verkossa ei tehdä eroa lähtö- ja kohdesolmun välillä.

- *Suunnattu verkko on järjestetty pari $[V, E]$ ($V =$"vertex", $E =$"edge") missä V on joukko (tavallisesti äärellinen ja ei-tyhjä) ja $E \subset V \times V$, eli E on relaatio joukossa V.*
- *Suuntaamaton verkko on järjestetty pari $[V, E]$ missä V on joukko (tavallisesti äärellinen ja ei-tyhjä) ja $E \subset \{ \{a, b\} : a \in V, b \in V \}$.*

Suuntaamaton verkko voidaan myös ajatella olevan suunnattu verkko missä relaatio E on symmetrinen, eli $[a, b] \in E \to [b, a] \in E$.

Erilaisia relaatioita joukossa X

Relaatio W joukossa X on

- *refleksiivinen jos $[x, x] \in W$ kaikilla $x \in X$.*
- *symmetrinen jos $[x, y] \in W \to [y, x] \in W$ kaikilla x ja $y \in X$.*
- *transitiivinen jos $[x, y] \in W$ & $[y, z] \in W \to [x, z] \in W$ kaikilla x, y ja $z \in X$.*
- *antisymmetrinen jos $[x, y] \in W$ & $x \neq y \to [y, x] \notin W$ eli $[x, y] \in W$ & $[y, x] \in W \to x = y$ kaikilla x ja $y \in X$.*
- *asymmetrinen jos $[x, y] \in W \to [y, x] \notin W$ kaikilla x ja $y \in X$.*
- *totaalinen tai täydellinen jos $[x, y] \in W \mid [y, x] \in W$ kaikilla x ja $y \in X$.*
- **ekvivalenssirelaatio** *jos W on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.*
- **osittaisjäjestys** *jos W refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen.*

Usein kirjoitetaan $[x, y] \in W$:n sijasta xWy esim. $x \prec y$ sen sijaan, että kirjoitettaisiin $[x, y] \in \prec$.

Funktiot

Jos X ja Y ovat joukkoja niin funktio $f : X \to Y$ on relaatio joukosta X joukkoon Y eli $X \times Y$:n osajoukko siten, että

- *jokaisella $x \in X$ on olemassa $y \in Y$ siten, että $[x, y] \in f$.*
- *jos $[x, y_1] \in f$ ja $[x, y_2] \in f$ niin $y_1 = y_2$.*

Tavallisesti funktio esitetään siten, että $[x, y] \in f$ jos ja vain jos $y = f(x)$

(vaikka xf tms. voisi olla parempi merkintätapa jos luetaan vasemmalta oikealle).

Toisin sanoen, funktio f joukosta X joukkoon Y on "sääntö", joka jokaisella $x \in X$ antaa vastaukseksi yksikäsitteisen alkion $y = f(x)$ joukossa Y.

- *Jos $f : X \to Y$ on funktio niin X on sen määrittely- eli lähtöjoukko ja Y on sen maalijoukko.*
- *$Y^X = \{ f : f$ on funktio joukosta X joukkoon $Y \}$.*
- *Jos $f : X \to Y$ on funktio ja $A \subset X$ niin $f_{|A} : A \to Y$ on funktio f rajoitettuna joukkoon A eli relaationa $f_{|A} = \{ [x, y] : [x, y] \in f, x \in A \}$.*

Anonyymit funktiot

Voidaan puhua esim. luvusta 2 ilman sekaantumisen vaaraa, mutta jos puhutaan lausekkeesta $x + 3$ ei ole välttämättä selvää tarkoitetaanko funktiota, joka antaa tulokseksi argumenttinsa johon on lisätty 3 vai tämän funktion arvo kun argumentti on x. Jos tarkoitetaan funktiota eikä sen arvoa niin voidaan kirjoittaa $x \mapsto x + 3$ tai `@(x)x+2` tai `function(x){return x+3;}` tai jotain muuta vastaavaa.

Injektiot, surjektiot och bijektiot

Funktio $f : X \to Y$ on

- *injektio jos $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$.*
- *surjektio jos kaikilla $y \in Y$ on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$.*
- *bijektio jos se on sekä injektio että surjektio.*

Ekvivalentti määritelmä on, että $f : X \to Y$ on injektio jos $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$ ja f on surjektio jos arvojoukko $f(X) = \{ f(x) : x \in X \}$ on sama kuin maalijoukko Y eli $f(X) = Y$.

Yhdistetyt funktiot ja käänteisfunktiot

- *Jos $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ ovat kaksi funktiota niin $h = g \circ f : X \to Z$ on funktio $h(x) = g(f(x))$.*
- *Jos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ ja $h : Z \to W$ ovat funktioita niin $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ joten tämä funktio voidaan myös kirjoittaa muodossa $h \circ g \circ f$.*
- *Jos $f : X \to Y$ sellainen funktio, että on olemassa funktio $g : Y \to X$ siten että $(g \circ f)(x) = x$ ja $(f \circ g)(y) = y$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$ niin f on kääntyvä, g on f:n käänteisfunktio ja ja useimmiten kirjoitetaan $g = f^{-1}$.*
- *Funktio $f : X \to Y$ on kääntyvä jos ja vain jos se on bijektio.*
- *Jos $f : X \to Y$ on kääntyvä niin $(f^{-1})^{-1} = f$ eli käänteisfunktio on myös kääntyvä ja sen käänteisfunktio on f.*

Huomaa ,ettei f^{-1} ole sama funktio kuin $h(x) = f(x)^{-1}$ joka edyllyttää että Y:n (fai ainakin arvojoukon) elementeillä on käänteeisalkioita mikä on esim. tilanne joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mutta ei joukossa $\mathbb{Z}$.

Ordo eli Iso-O: $f \in O(g)$

Jos g on funktio, joka on määritelty kaikilla "riittävän isoilla" kokonaisluvuilla niin $f \in O(g)$ kertoo että myös f on määritelty kaikilla "riittävän isoilla" kokonaisluvuilla ja on olemassa vakioita C ja N siten, että

$$|f(n)| \leq C|g(n)|, \quad n \geq n.$$

Tämän merkinnän käyttö tarkoittaa myös sitä, ettei ole erityisen oleellista mitä vakiot C ja N oikeasti ovat tai miten pieniksi niitä voi valita. Usein kirjoitetaan $f \in O(g)$:n sijasta $f(n) = O(g(n))$ mutta jos $O(n) + O(n^2) \in O(n^2)$:n sijasta kirjoitetaan $O(n) + O(n^2) = O(n^2)$ niin pitää muistaa, ettei tästä seuraa $O(n) = 0$!

Tässä käsitellään yksinkertaisuuden vuoksi vain (tietyillä) kokonaisluvuilla märiteltyjä funktioita ja samoin tarkastellaan ainoastaan mitä tapahtuu kun $\to \infty$ mutta se ei ole mitenkään oleellista. Esimerkiksi pätee myös $\frac{x^4 - x^3}{x^3 + x^2} \in O(x)$ kun $x \to 0$.

Joukon mahtavuus eli alkioiden lukumäärä

- *Kahdella joukolla A ja B on sama lukumäärä alkioita $|A|$ och $|B|$ eli ne ovat yhtä mahtavia, jos on olemassa bijektio $A \to B$.*
- *Joukolla A on vähemmän tai yhtä monta alkiota kuin joukolla B, eli $|A| \leq |B|$, jos on olemassa injektio $A \to B$.*
- *Joukolla A on vähemmän alkioita kuin joukolla B, eli $|A| < |B|$, jos on olemassa injektio $A \to B$ mutta ei bijektiota $A \to B$.*
- *Jos $A = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ niin $|A| = n$.*
- *Joukko A on äärellinen jos on olemassa kokonaisluku n siten, että $|A| = n$.*
- *Joukko A on numeroituva ja $|A| = |\mathbb{N}|$ ja ylinumeroituva jos $|A| > |\mathbb{N}|$.*

Huom!

Jotta nämä määritelmät olisivat järkeviä pitää osoittaa, että on olemassa bijektio $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ jos ja vain jos $m = n$ ja jos on olemassa injektioita $A \to B$ ja $B \to A$ niin löytyy myös bijektio $A \to B$.

Summaperiaate, yksinkertaisin muoto

Jos A ja B ovat kaksi (äärellistä) joukkoa siten, että $A \cap B = \emptyset$ niin

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Tästä seuraa, että jos $B \subset A$ niin $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

Tuloperiaate, yksinkertaisin muoto

Jos A ja B ovat kaksi (äärellistä) joukkoa niin

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Lokero- eli kyyhkyslakkaperiaate

Jos $m \geq 1$ esinettä laitetaan $n \geq 1$ laatikkoon niin ainakin yhdessä laatikossa on vähintään $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ esinettä!
Miksi? Jos laatikoissa olevien esineiden lukumäärän maksimi on k niin $k \cdot n \geq m$ joten $k \geq \frac{m}{n}$ ja koska määritelmän mukaan $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ on pienin kokonaisluku joka on $\geq \frac{m}{n}$ niin $k \geq \lceil \frac{m}{n} \rceil$.

Seulaperiaate eli yleistetty summaperiaate

Jos A_j, $j = 1, 2, \ldots$ ovat äärellisiä joukkoja niin

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|, \\
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\
&\quad - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|, \\
\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right| &= \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq k} \left|\bigcap_{i=1}^{r} A_{j_i}\right|.
\end{aligned}$$

Tuloperiaate

Jos valinta- tai päätösprosessissa on k vaihetta ja vaiheessa j on n_j vaihtoehtoa, riippumatta siitä mitä valintoja tai päätöksiä on aikaisemmissa vaiheissa tehty, ja jos kaikki valinnat johtavat erilaisiin lopputuloksiin, niin kaikkien vaihtoehtojen lukumääräksi tulee

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Toisin sanoen, jos

$$C = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_{2,x_1},\ \ldots, x_k \in A_{k,x_1,\ldots,x_{k-1}} \,\},$$

missä $|A_1| = n_1$, jokaisella $x_1 \in A_1$ pätee $|A_{2,x_1}| = n_2$ ja yleisesti jos $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_{2,x_1}$, $x_3 \in A_{3,x_1,x_2}$ jne., niin pätee $|A_{j,x_1,x_2,\ldots,x_{j-1}}| = n_j$, $1 \leq j \leq k$, niin silloin

$$|C| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Kertoma

Jos n on positiivinen kokonaisluku niin

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Lisäksi $0! = 1$.

Binomikerroin

Jos n ja k ovat kokonaislukuja siten, että $0 \le k \le n$ *niin*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

jolloin $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Multinomikerroin

Jos $n_j \ge 0$ *kun* $j = 1, 2, \ldots, m$ *ja* $n = n_1 + n_2 + \ldots n_m$ *niin*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}.$$

Järjestetty otos

A on joukko jossa on n alkiota (eli $|A| = n$*).*

- *Jos valitaan k alkiota joukosta A ja muodostetaan niistä jono* $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ *ja tehdään tämä* **palauttamatta**, *eli samaa alkiota ei valita monta kertaa jolloin* $x_i \ne x_j$ *kun* $i \ne j$ *niin saadaan ns. k-permutaatio. Näiden jonojen eli k-permutaatioiden lukumäärä on tuloperiaatteen nojalla*
$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- *Jos valitaan k alkiota joukosta A ja muodostetaan niistä jono* $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ *ja tehdään tämä* **palauttaen**, *eli voidaan valita sama alkio monta kertaa jolloin ainoa vaatimus on, että* $x_j \in A$ *kun* $1 \le j \le k$ *niin tuloperiaatteen nojalla näiden jonojen lukumäärä on*
$$|A|^k = n^k.$$

Huomaa, että molemmissa tapauksissa on oleellista että kyseessä on järjestetty otos eli sillä, missä järjestyksessä alkiot valitaan A:sta, on merkitystä.

Otos palauttamatta kun järjestystä ei oteta huomioon

A on joukko jossa on n alkiota (eli $|A| = n$*).*

- *Jos valitaan k alkiota joukosta A palauttamatta, eli samaa alkiota ei valita monta kertaa eikä valintajärjestystä oteta huomioon niin saadaan A:n osajoukko jossa on k alkiota. Tällaisten osajoukkojen lukumäärä on*
$$\binom{n}{k}.$$
Miksi? Jos kyseinen lukumäärä on $f(n,k)$ *niin palauttamatta otettujen järjestettyjen otosten lukumäärä on* $f(n,k) \cdot k!$ *koska k alkiota voidaan järjestää jonoksi k! eri tavalla. Näin ollen* $f(n,k) \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ *niin* $f(n,k) = \binom{n}{k}$.
- *Joukkoa A voidaan jakaa osajoukoiksi* A_j, $j = 1, \ldots, m$ *siten, että* $\cup_{j=1}^m A_j = A$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *kun* $i \ne j$, *ja* $|A_j| = n_j$
$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$$
eri tavalla.

Otos palauttaen kun järjestystä ei oteta huomioon

Joukosta A, jossa on n alkiota, voidaan valita k alkiota palauttaen, eli voidaan valita sama alkio monta kertaa,

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k},$$

eri tavalla jos valintajärjestystä ei oteta huomioon.

Miksi? Olkoon $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Kun valitsemme k alkiota, palauttaen, joukosta A eikä järjestyksellä ole merkitystä niin ainoa asia jolla on merkitystä on montako kertaa valitsemme alkion* x_j *missä* $j = 1, \ldots, n$. *Jos alkio* x_j *on valittu* k_j *kertaa niin* $\sum_{j=1}^n k_j = k$. *Kaikki tällaiset jonot* $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$ *voidaan generoida seuraavalla tavalla: Joukosta* $\{1, 2, \ldots, k+n-1\}$ *valitaan osajoukko johon kuuluu* $n-1$ *lukua. Nämä luvut olkoot* $1 \le p_1 < p_2 < \ldots < p_{n-1} \le k+n-1$ *ja lisäksi määritellään* $p_0 = 0$ *ja* $p_n = k+n$. *Nyt luvuksi* k_j *otetaan* $k_j = p_j - p_{j-1} - 1$, $j = 1, \ldots, n$. *Jos esimerkiksi* $n = 4$ *ja* $k = 10$ *niin jono* $[k_1, k_2, k_3, k_4] = [3, 2, 2, 3]$ *voidaan esittää näin:* $\underbrace{***}_{k_1}|\underbrace{**}_{k_2}|\underbrace{**}_{k_3}|\underbrace{***}_{k_4}$ *eli erotetaan* $*$*-jonot toisistaan* $|$*-merkeillä joita on* $n-1$ *kappaletta ja joiden indeksit jonossa ovat* p_j, *eli tässä esimerkissä* $p_1 = 4$, $p_2 = 7$ *ja* $p_3 = 10$.

Allokointimallit eli vaihtoehtoinen ajattelutapa

On sijoitettava k palloa n:ään numeroituun laatikkoon.

- *Pallot numeroitu $\leftrightarrow$ Valintajärjestyksellä on merkitystä.*
- *Pallot samanlaiset: $\leftrightarrow$ Valintajärjestyksellä ei ole merkitystä.*
- *Jokaiseen laatikkoon korkeintaan yksi pallo $\leftrightarrow$ Valinta palauttamatta.*
- *Jokaiseen laatikkoon mielivaltainen määrä palloja $\leftrightarrow$ Valinta palauttaen.*

	Pallojen lukumäärä laatikoissa	
	≤ 1	*ei rajoituksia*
Pallot numeroitu	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Samanlaiset pallot	$\binom{n}{k}$	$\binom{k+n-1}{n-1}$

Binomi- ja multinomikaavat

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j},$$

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_m=n \\ n_j \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{n_m}.$$

Miksi? Binomikaava on erikoistapaus multinomikaavasta koska $\binom{n}{j} = \binom{n}{j, n-j}$ *ja multinomikaava pätee koska* $(x_1 + \ldots + x_m)^n$ *voidaan kirjoittaa summana jossa on* m^n *termiä jotka ovat tyyppiä* $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$ *missä jokainen* $y_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. *Jokainen muotoa* $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{n_m}$ *termi syntyy siitä, että joukko* $\{1, \ldots, n\}$ *jaetaan osajoukkoihin* A_j, $j = 1, \ldots, m$ *siten että* $i \in A_j$ *jos ja vain jos* $y_i = x_j$ *jolloin siis* $|A_j| = n_j$. *Tällaisia osituksia on täsmälleen* $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ *kappaletta.*
Tästä seuraa myös, että $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ *kertoo monellako tavalla voidaan kirjoittaa jono* $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *siten että siinä esiintyy* n_j *kertaa alkio* x_j *kaikilla* $j = 1, 2, \ldots, m$.

Funktioiden lukumäärät

Oletetaan, että $|A| = m$ *och* $|B| = n$.

- *Funktioden* $A \to B$ *lukumäärä on* $|B^A| = n^m$.
  Miksi? Funktio $f : A \to B$ *on järjestetty* m*-kokoinen otos palauttaen joukosta jossa on* n *alkiota.*
- *Injektioiden* $A \to B$ *lukumäärä on*
  $$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad m \leq n.$$
  Miksi? Injektio $A \to B$ *on järjestetty* m*-kokoinen otos palauttamatta joukosta jossa on* n *alkiota.*
- *Surjektioiden* $A \to B$ *lukumäärä on* $\sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} r^m$.
  Miksi? Surjektioiden lukumäärä on kaikkien funktioiden lukumäärä josta vähennetään niiden funktioden lukumäärä joiden arvojoukko on B*:n aito osajoukko ja tämä on laskettavissa seulaperiaatteen avulla jolloin lopulta saadaan yllä oleva kaava.*