MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet
Esimerkkejä, todistuksia ym., osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

3. huhtikuuta 2014

Joukot ja implikaatiot

Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 3, 4\}$ *ja* $C = \{x : x \text{ on kokonaisluku } \geq 2\}$. *Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?*

(a) $x \in A \cap C \to x \in B$ *kaikilla* x*?*

(b) $A \subset B \to C \subset A$*?*

(c) *On olemassa* $y \in C$ *siten, että* $y \in B \to y \notin A \cup B$*?*

(d) $y \notin B \to y \notin A$ *kaikilla* $y \in C$*?*

Ratkaisu: (a) Koska $A \cap C = \{2, 3, 4\}$ *niin pätee* $2 \in A \cap C$ *mutta koska* $2 \notin B$ *niin tämä väite ei päde (ja väite sanoo, että* $A \cap C \subset B$*).*
(b) Koska $2 \in A$ *mutta* $2 \notin B$ *niin ei päde* $A \subset B$ *ja näin ollen implikaatio* $A \subset B \to C \subset A$ *on tosi.*
(c) Tämäkin väite on tosi koska esim. $2 \in C$*, mutta* $2 \notin B$ *mistä seuraa, että* $2 \in B$ *on epätosi joten* $2 \in B \to 2 \notin A \cup B$ *on tosi.*
(d) Tämä väite on epätosi koska esim. $2 \in C$ *ja* $2 \notin B$ *mutta* $2 \in A$ *joten* $2 \notin A$ *on epätosi.*

Miksi joukko-oppi ei ole niin yksinkertaista kuin miltä näyttää?

Niin kauan kun tarkastelvissa joukoissa on vain ärellisen monta alkiota, kuten joukossa $\{1, 3, 4, 7\}$*, ongelmia ei juuri esiinny mutta klassinen esimerkki ongelmista on jos yritämme määritellä joukkoa* A *kaavalla*

$$A = \{ x : x \notin x \}.$$

Jos nyt $A \in A$ *niin* $x \notin x$ *ei päde kun* x *on* A *ja* A*:n määritelmän mukaan* $A \notin A$ *ja olemme saaneet aikaan ristriidan. Jos sen sijaan* $A \notin A$ *niin ehto* $x \notin x$ *on voimassa kun* x *on* A *joten* $A \in A$ *ja taas tuloksena on ristiriita. Vastaavanlaisia ongelmia syntyy jos sanomme "Tämä on valhe" tai jos puhumme "parturista, joka leikkaa hiukset kaikilla niillä henkilöillä, jotka eivät itse leikkaa hiuksiaan".*

Induktio

Osoitamme induktion avulla, että

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Väite $P(n)$ *on siis* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ *ja* $n_0 = 1$. *Näin ollen väite* $P(n_0)$ *on sama kuin* $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ *mikä pitää paikkansa. Oleta seuraavaksi, että* $P(k)$ *on tosi ja* $k \geq 1$. *Koska* $P(k)$ *pätee, niin* $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ *mistä seuraa, että*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2},\end{aligned}$$

joka taas merkitsee sitä, että $P(k+1)$ *on tosi. Induktioperiaatteen nojalla toteamme, että* $P(n)$ *pätee kaikilla* $n \geq 1$.

Päättelysäännöt ja todistukset logiikassa

Todistus on lista lauseista joissa jokainen lause on joko aksiomi (eli oletetaan olevan tosi) tai johdettu aikaisemmistä lauseista.
Päättelysäännöt ovat seuraavanlaisia:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ \underline{L_n} \\ \therefore Q \end{array}$$

eli jos $L_1, \ldots, L_n$ ovat lauseita todistuksessa, voidaan todistukseen lisätä lause Q.
Päättelysäännöt perustuvat siihen, että $L_1 \,\&\, L_2 \,\&\, \ldots \,\&\, L_n \to Q$ on tautologia eli on aina tosi ja tärkein päättelysääntö on ns. modus ponens eli

$$\begin{array}{l} x \\ \underline{x \to y} \\ \therefore y. \end{array}$$

Päättelysäännöt ja todistukset logiikassa

Olkoot p ja q kaksi lausetta. Nyt todistamme, että q on tosi jos p & !p on tosi, eli jos oletetaan ristiriitainen väite voidaan todistaa mitä vaan. Päättelysäännötöinä käytetään tässä

(a) $\dfrac{x \mid y \qquad !x}{\therefore y}$

(b) $\dfrac{x \,\&\, y}{\therefore x}$

(c) $\dfrac{x}{\therefore x \mid y}$

(d) $\dfrac{x \,\&\, y}{\therefore y \,\&\, x}$

Päättelysäännöt ja todistukset logiikassa, jatk.

Todistus näyttää nyt seuraavanlaiselta:

(1) $p \,\&\, !p$: *Oletus*

(2) p: *(1) ja (b) missä* $x = p$ *ja* $y = !p$

(3) $p \mid q$: *(2) ja (c) missä* $x = p$ *ja* $y = q$

(4) $!p \,\&\, p$: *(1) ja (d) missä* $x = p$ *ja* $y = !p$

(5) $!p$: *(1) ja (b) missä* $x = !p$ *ja* $y = p$

(6) q: *(3), (4) ja (a) missä* $x = p$ *ja* $y = q$.

Näin lause q on tullut todistetuksi.

Järjestetyn parin koordinaatit

Parin $[x, y]$ (tai (x, y)) ensimmäinen koordinaatti on (tietenkin) x ja toinen on y. Jos parin määritelmäksi otetaan $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ niin voidaan määritellä predikaatit $E(p, x)$ ja $T(p, y)$ jotka sanovat, että x on p:n ensimmäinen koordinaatti ja y on p:n toinen koordinaatti seuraavalla tavalla:

$$E(p, x) = \forall z((z \in p) \rightarrow (x \in z))$$

(tai lyhyemmin $\forall z \in p\,(x \in z)$) ja

$$T(p, y) = (\exists z((z \in p)\ \&\ (y \in p)))\ \&$$
$$(\forall u(\forall v(((u \in p)\ \&\ (v \in p))\ \&\ (!(u = v)) \rightarrow ((!(y \in u))\ |\ (!(y \in v)))))).$$

Tässä lausekkeessa on häiritsevän monta sulkua ja voimme myös kirjoittaa $\exists z((z \in p)\ \&\ (y \in p))\ \&\ \forall u \forall v((u \in p)\ \&\ (v \in p)\ \&\ !(u = v) \rightarrow !(y \in u)\ |\ !(y \in v))$. *Vielä lyhyempi muoto olisi* $\exists z \in p(y \in p)\ \&\ \forall u \in p \forall v \in p\,(!(u = v) \rightarrow (y \notin u)\ |\ (y \notin v))$.

Esimerkki osittaisjärjestyksestä

Olkoon X jokin (ei-tyhjä) joukko ja $\mathcal{P}(X)$ sen kaikkien osajoukkojen muodostama joukko (eli ns. potenssijoukko). Joukossa $\mathcal{P}(X)$ meillä on relaatio $\subset$: $A \subset B$ jos ja vain jos A on B:n osajoukko (ja muista että $A \subset B$ myös kun $A = B$. Tämä relaatio on osittaisjärjestys koska se on

- *refleksiivinen: $A \subset A$,*
- *antisymmetrinen: Jos $A \subset B$ ja $A \neq B$ niin on olemmassa $x \in B$ siten että $x \notin A$ jolloin $B \not\subset B$,*
- *transitiivinen: Jos $A \subset B$ ja $B \subset C$ niin jokainen A:n alkio on B:n alkio ja koska jokainen B:n alkio on C:n alkio niin jokainen A:n alkio on C:n alkio, eli $A \subset C$.*

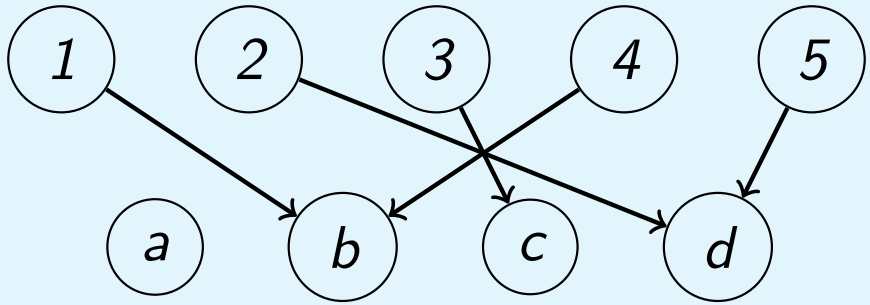
Lisäksi tällä relaatiolla on muitakin ominaisuuksia kuten, että jos A, $B \in \mathcal{P}(X)$ niin joukoille A ja B löyty pienin yläraja, eli joukko C siten, että $A \subset C$, $B \subset C$ (eli C on yläraja) ja jos $A \subset D$ ja $B \subset D$ niin $C \subset D$ (eli C on pienin yläraja). Selvästikin $C = A \cup B$. Vastaavasti löytyy myös suurin ala-raja joka (tietenkin) on $A \cap B$.

Listat, jonot ja karteesiset tulot funktioina

- *Listaa* $[a, b, c, d]$ *voidaan tulkita olevan funktio* f *joukosta* $\{1, 2, 3, 4\}$ *(tai joukosta* $\{0, 1, 2, 3\}$*) joukkoon joka sisältää esim kaikki aakkoset siten, että* $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ *och* $f(4) = d$.
- *Reaalinen lukujono* $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *voidaan tulkita olevan funktio* f *joukosta* N_0 *joukkoon* $\mathbb{R}$ *siten, että* $f(n) = a_n$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}_0$.
- *Jos* Y_j *on joukko jokaisella* $j \in J$ *missä* J *on (toinen) joukko niin voidaan märitellä karteesinen tulo* $\prod_{j \in J} Y_j$ *joukkona, jonka alkiot ovat kaikki funktiot* $f : J \to \bigcup_{j \in J} Y_j$ *siten, että* $f(j) \in Y_j$. *Jos* $Y_j = Y$ *kaikilla* $j \in J$ *niin joukko* $\prod_{j \in J} Y_j$ *on täsmälleen kaikki funktiot* $J \to Y$ *ja tälle joukolle käytetään merkintää* Y^J *eli esim.* $Y^{\{1,2,3\}} = Y \times Y \times Y = Y^3$.

Injektio, surjektio, bijektio

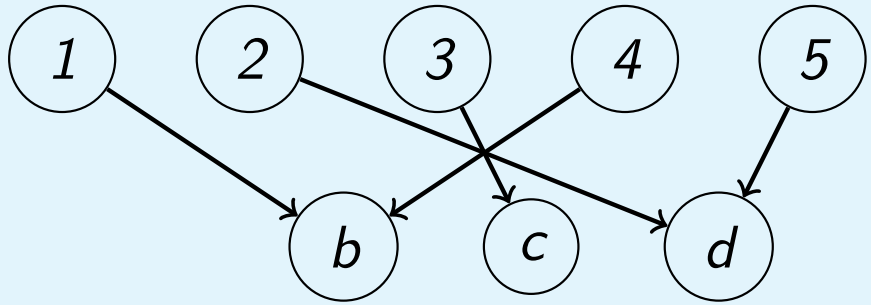
Alla oleva verkko esittää funktiota $f : X \to Y$*:*



Tässä tapauksessa määrittely- eli lähtöjoukko on $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *ja maalijoukko on* $Y = \{a, b, c, d\}$ *ja kyseessä on funktio koska jokainen* X*:n alkio on täsmälleen yhden kaaren lähtösolmu.*

Kyseinen funktio ei ole surjektio koska $a \notin f(X)$ *mutta siitä tulee surjektio jos* Y *korvataan joukolla* $Y' = Y \setminus \{a\}$*. Funktion arvot eivät tästä muutu, ainoastaan maalijoukko korvataan toisella ja käytännön kannalta (vaikka ei ehkä periaatteessa) meillä on edelleen täsmälleen sama funktio.*

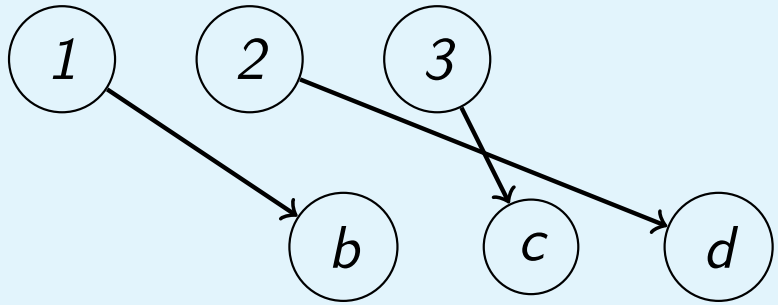
$f : X \to Y'$



Injektio, surjektio, bijektio, jatk.

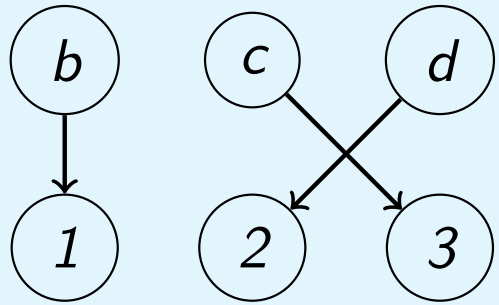
Funktio f ei ole myöskään injektio koska esim. $f(1) = f(4)$, mutta siitä voidaan konstruida injektio poistamalla esim. alkiot 4 ja 5 joukosta X ja rajoittamalla f joukkoon $X' = X \setminus \{4, 5\}$. Näin saatu funktio $f_{|X'} : X' \to Y'$ on bijektio.

$$f_{|X'} : X' \to Y'$$



Jokaisella bijektiolla on käänteisfunktio ja tässä tapauksessa sen verkkoesitys on seuraavanlainen:

$$f^{-1}_{|X'} : Y' \to X'$$



Surjektioiden $A \to B$ lukumäärä kun $|A| = m$ ja $|B| = n$

Oleta $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Olkoon $F = B^A$ kaikkien funktioiden $A \to B$ joukko ja $F_j = (B \setminus \{b_j\})^A \subset F$ kaikkien funktioiden $A :\to B \setminus \{b_j\}$ joukko eli niiden F:n alkoiden f joukko joille pätee, että $f(x) \neq b_j$ kaikilla $x \in A$. Surjektioiden joukko on siten $F \setminus \cup_{j=1}^{m} F_j$. Nyt $F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap \ldots \cap F_{j_r}$ on joukko $(B \setminus \{b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots b_{j_r}\})^A$ johon kuuluvat kaikki funktiot $A \to B$ jotka eivät saa arvoja $b_{j_1}, \ldots, b_{j_r}$. Jos $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ niin $|F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap \ldots \cap F_{j_r}| = (n-r)^m$. Koska on $\binom{n}{r}$ eri tapaa valita indeksit $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ niin seulaperiaatteesta seuraa, että surjektioiden $A \to B$ lukumäärä on

$$n^m - \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^m \right) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^m$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} r^m.$$

Huomaa, että kun $m < n$ ei ole surjektioita $A \to B$ joten $\sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} r^m = 0$ kun $m < n$, mikä ehkä ei ole aivan ilmeistä.

Monellako tavalla voidaan sijoittaa k identtistä palloa n:ään identtiseen laatikkoon?

Olkoon $A(k,n)$ tämä lukumäärä. Koska voimme sijoittaa $k \geq 0$ palloa 1:een laatikkoon vain yhdellä tavalla niin $A(k,1) = 1$ kun $k \geq 0$. Jos $k = 0$ niin kaikki laatikot ovat tyhjiä ja meillä on vain yksi vaihtoehto eli $A(0,n) = 1$ kaikilla $n \geq 1$.

Oleta nyt, että $k \geq 1$ ja $n \geq 2$. Olkoon j ($j \geq 0$) pallojen lukumäärä siinä laatikossa missä on vähiten palloja. Eri j:n arvoilla saadaan varmasti erilaisia vaihtoehtoja. Nyt sijoitamme ensin j palloa jokaiseen laatikkoon ja sen jälkeen jäljellä olevat $k - n \cdot j$ palloa niihin $n-1$:een laatikkoon joissa voi olla enemmän kun j palloa ja tämä on mahdollista $A(k - n \cdot j, n-1)$:llä eri tavalla. Jos $j > \frac{k}{n}$ niin $k - n \cdot k < 0$, joten rekursioyhtälöksi tulee

$$A(k,n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} A(k - n \cdot j, n-1).$$

Esimerkki

Tentissä valvojat jakavat 150 *tehtäväpaperia* 160*:lle tenttijälle. Monellako tavalla tämä on mahdollista?*

Tässä oletetaan, että tehtäväpaperit ovat identtiset mutta tenttijät eivät ole.

Ensimmäinen, järkevä, vaihtoehto on että jokaiselle tenttijälle annetaan korkeintaan yksi paperi. Silloin on kysymys siitä monellako tavalla voimme 160 *henkilön joukosta valita ne* 150*, jotka saavat paperin. Tässä on kyse valinnasta palauttamatta kun järjestyksellä ei ole merkitystä, joten vaihtoehtoja on* $\binom{160}{150} = \binom{160}{10}$

Toinen, vähemmän järkevä, vaihtoehto on, ettei aseteta mitään rajoituksia montako paperia sama henkilö voi saada. Silloin valvojat valitsevat 150 *kertaa tenttijän, jolle paperi annetaan, joukosta, jossa on* 160 *alkiota, "palauttaen" eikä valintajärjestyksellä ole merkitystä. Vaihtoehtojen lukumääräksi tulee silloin* $\binom{150+160-1}{160-1} = \frac{309!}{159! \cdot 150!}$.