

Palauta P-tehtävät (ja vastaa S-tehtäviin) viimeistään 9.3.2015 klo. 16.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Jos X ja Y ovat joukkoja ja $f : X \rightarrow Y$ on funktio niin voimme määritellä funktiot $f^{\rightarrow} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ja $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ seuraavalla tavalla:

$$f^{\rightarrow}(A) = \{ f(x) \in Y : x \in A \}, \quad A \in \mathcal{P}(X),$$
$$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}, \quad B \in \mathcal{P}(Y),$$

missä siis $\mathcal{P}(X)$ on X :n osajoukkojen joukko. Sanomme, että $f^{\rightarrow}(A)$ on A :n kuva kuvauksessa f ja $f^{\leftarrow}(B)$ on B :n alkukuva kuvauksessa f .

- (a) Osoita, että f^{\leftarrow} on surjektio jos f on injektio.
- (b) Osoita esimerkiksi, että jos f^{\rightarrow} :n sijasta kirjoitetaan f niin tämä voi johtaa siihen, ettei f ole hyvin määritelty funktio joukossa $X \cup \mathcal{P}(X)$.

Vihje: Kohdassa (a) sinun pitää siis osoittaa, että jos $A \subseteq X$ niin on olemassa $B \subseteq Y$ siten, että $A = \{ x \in X : f(x) \in B \}$. Jos nyt valitset $B = f^{\rightarrow}(A)$ niin sinun pitää osoittaa, että jos $x \in A$ niin $x \in f^{\leftarrow}(B)$ ja jos $u \in f^{\leftarrow}(B)$ niin $u \in A$. Kohdassa (b) voit esim. valita $X = \{0, 1, \{0, 1\}\}$.

Huom! Tavallisesti kirjoitetaan f^{\rightarrow} :n sijasta f (f^{\rightarrow} on vain tässä tehtävässä esiintyvä merkintä) ja usein kirjoitetaan f^{\leftarrow} :n sijasta f^{-1} .

P2. Jos meidän pitää laskea x^n ja laskemme $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$ jne. niin joudumme laskemaan $n - 1$ kertolaskua. Tehokkaampi tapa on laskea $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$ jne. ja sitten kertoa tarvittavat x^{2^j} :n potenssit keskenään jotta saisimme tulokseksi x^n . Määritä kohtuullisen yksinkertainen funktio $f(n)$ siten, että kertolaskujen lukumäärä tällä menetelmällä on $O(f(n))$.

P3. Konstruoi bijektio $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ja huomaa, että 1 kuuluu määrittelyjoukkoon mutta ei maalijoukkoon.

Vihje: Voit helposti konstruoida surjektion määrittelemällä $f(x) = x$ kun $0 \leq x < 1$ ja ottamalla sitten esim. $f(1) = \frac{1}{2}$. Modifioi tätä konstruktioita siten, että saat bijektion.

P4. Olkoon $\text{Sur}(m, n)$ surjektioden lukumäärä joukosta A joukkoon B kun joukossa A on m alkioita ja joukossa B on n alkioita. Jos konstruoit surjektiot $f : A \rightarrow B$ seuraavalla tavalla niin voit myös laskea montako niitä on:

- (a) Valitse jokin alkio $a_0 \in A$ ja valitse sen jälkeen $f(a_0)$. Monellako tavalla voit valita $f(a_0)$:n? Huomaa, että jokainen valinta antaa eri funktion.
- (b) Seuraavaksi määrittele funktion f joukossa $A \setminus \{a_0\}$. Nyt on kaksi toisiaan poissulkevaa tapausta:
 - (b-1) Jollekin $a_1 \neq a_0$ annat arvoksi $f(a_1) = f(a_0)$ jolloin f rajoitettuna joukkoon $A \setminus \{a_0\}$ eli funktio $f|_{A \setminus \{a_0\}}$ on surjektio: $A \setminus \{a_0\} \rightarrow B$. Montako tällaista surjektiota löytyy? Kirjoita vastauksesi Sur-funktion avulla.
 - (b-2) Kaikilla $a \in A \setminus \{a_0\}$ pätee $f(a) \neq f(a_0)$ jolloin f rajoitettuna joukkoon $A \setminus \{a_0\}$ eli funktio $f|_{A \setminus \{a_0\}}$ on surjektio: $A \setminus \{a_0\} \rightarrow B \setminus \{f(a_0)\}$. Montako tällaista surjektiota löytyy? Kirjoita vastauksesi Sur-funktion avulla.
- (c) Jos (a)- ja (b)-kohdan sekä tulo- ja summaperiaatteen avulla lasket $\text{Sur}(m, n)$, niin minkä kaavan saat?
- (d) Laske $\text{Sur}(5, 2)$ (c)-kohdan avulla ottaen huomioon, että (tietenkin?) pätee $\text{Sur}(m, 1) = 1$ kun $m \geq 1$ ja $\text{Sur}(m, n) = 0$ kun $m < n$.

Vastaus: $\text{Sur}(5, 2) = 30$

P5. Osoita, ettei löydy surjektiota $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ missä siis $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ on kaikkien funktioiden $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ joukko.

Vihje: Tee vasta oletus, että tällainen surjektio h löytyy ja johda siitä ristiriita konstruoimalla funktio f joka kuuluu joukkoon $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ mutta $f \neq h(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Jos $n \in \mathbb{N}_0$ niin $h(n)$ on funktio $\mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ eli $h(n)(j) \in \{0, 1\}$ kaikilla $j \geq 0$. Määrittele funktiosi f lukujen $h(n)(n)$ avulla.