

Palauta P-tehtävät (ja vastaa S-tehtäviin) viimeistään 2.3.2015 klo. 16.

Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Osoita, että jos A ja B ovat joukkoja niin $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ missä $\mathcal{P}(X)$ on joukon X osajoukkojen joukko (eli $X \in \mathcal{P}(Y)$ jos ja vain jos $X \subseteq Y$).

P2. Esitä seuraavat väitteet logiikan ja joukkopin merkinnöillä AND, OR, NOT, \rightarrow , \forall , \exists , \in , \mathbb{R} ja \mathbb{Z} (missä \mathbb{R} on reaalilukujen joukko ja \mathbb{Z} on kokonaislukujen joukko) sekä normaaleilla matemaattisilla merkinnöillä:

- (a) ”Jos x ei ole kokonaisluku niin $x + 1$ ei myöskään ole kokonaisluku”.
- (b) ”Jokaisella kokonaisluvulla y on olemassa kokonaisluku x siten että $y = 2 \cdot x$ ”.
- (c) ”Jos x on negatiivinen reaaliluku niin on olemassa negatiivinen reaaliluku y joka on suurempi kuin x ”.

P3. Eräässä maassa, missä rahayksikkö on orue, käytössä on vain neljän ja viiden orueen kolikoita. Osoita induktiolla, että pystyt maksamaan minkä tahansa vähintään 12 orueen laskun käyttäen pelkästään näitä kolikoita, (olettaen, että sinulla on niitä riittävästi).

P4.

- (a) Todista, että jos a , b ja c ovat positiivisia reaalilukuja siten, että $a \cdot b = c$ niin pätee $a \leq \sqrt{c}$ tai $b \leq \sqrt{c}$.
- (b) Osoita, että on olemassa irrationaaliluvut a ja b siten, että a^b on rationaaliluku käyttämällä hyväksi tietoa, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen ja että $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.
(Huomaa, että sinun ei tarvitse tietää muuta rationaali- ja irrationaaliluvuista kuin että reaaliluku on joko rationaali- tai irrationaaliluku, 2 on rationaaliluku ja että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.)

P5. Perustele vastauksesi seuraaviin kysymyksiin:

- (a) Onko olemassa predikaatti $P(x, y)$ (eli väite, joka sanoo jotain muuttujista x ja y) siten, että lause $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ on epätosi?
- (b) Onko olemassa predikaatti $Q(x, y)$ (eli väite, joka sanoo jotain muuttujista x ja y) siten, että lause $\exists y \forall x Q(x, y) \rightarrow \forall x \exists y Q(x, y)$ on epätosi?

Joukko-opin perusmerkintöjä:

- Tyhjä joukko: $\emptyset = \{\}$ on tyhjä joukko johon ei kuulu yhtään alkioita, eli $x \in \emptyset$ on aina epätosi.
- Yhdiste tai unioni: $x \in A \cup B$ jos ja vain jos $x \in A$ **tai** $x \in B$.
- Leikkaus: $x \in A \cap B$ jos ja vain jos $x \in A$ **ja** $x \in B$.
- Joukkoerotus: $x \in A \setminus B$ jos ja vain jos $x \in A$ **mutta** $x \notin B$.
- Osajoukko: $A \subseteq B$ jos jokainen A :n alkio on myös B :n alkio.
- Yhtäläisyys: $A = B$ jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$.
- Komplementti: $A^c = \Omega \setminus A$ jos $A \subseteq \Omega$ ja on selvää mikä Ω on.
- Yhdiste tai unioni: $x \in \cup_{j \in J} A_j$ jos ja vain jos $x \in A_j$ jollakin $j \in J$.
- Leikkaus: $x \in \cap_{j \in J} A_j$ jos ja vain jos $x \in A_j$ kaikilla $j \in J$.

Logiikan perusmerkintöjä:

- Lause a **AND** b on tosi kun a on tosi ja b on tosi
- Lause a **OR** b on tosi kun a on tosi tai b on tosi (ja myös kun molemmat ovat tosia). och b är sanna).
- Lause **NOT** a on tosi kun a ei ole tosi eli a on epätosi.
- Lause $a \rightarrow b$ on tosi kun (**NOT** a) **OR** b on tosi, eli kun b on tosi tai a on epätosi.
- Lause $a \leftrightarrow b$ on tosi kun $(a \rightarrow b)$ **AND** $(b \rightarrow a)$ on tosi.
- Lause $\forall x P(x)$ on tosi kun $P(x)$ on tosi kaikilla x .
- Lause $\exists x P(x)$ on tosi kun on olemassa x siten, että $P(x)$ on tosi.
- Lause $\forall x \in A (P(x))$ on sama kuin $\forall x (x \in A \rightarrow P(x))$ ja $\exists x \in A (P(x))$ on sama kuin $\exists x (x \in A \text{ AND } P(x))$.

Induktioperiaate:

Jos $P(n)$ on väite (joka kaikilla $n \geq n_0$ on joko tosi tai epätosi) ja

- $P(n_0)$ on tosi
- $P(k + 1)$ on tosi jos $P(k)$ on tosi (eli $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ on tosi) kun $k \geq n_0$

niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq n_0$.