Aalto-yliopisto

Gripenberg

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet
Tentti 15.11.2016

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

Vastauksissasi saa numeroiden lisäksi olla potensseja, $\cdot$, $/$, $+$, $-$, !, (ja) mutta ei esimerkiksi binomikertoimia.

1. Osoita induktion avulla (vaikka se olisikin mahdollista jollain muullakin tavalla), että luku $2^{2\cdot n}-1$ on luvulla 3 jaollinen kun $n \geq 1$.

Ratkaisu: Kun $n = 1$ niin $2^{2n}-1 = 2^2-1 = 3$, joka on luvulla 3 jaollinen. Oletamme seuraavaksi, että $2^{2k}-1$ on luvulla 3 jaollinen missä $k \geq 1$. Tästä seuraa, että on olemassa kokonailsuku j siten, että $2^{2k}-1 = 3\cdot j$ eli $2^{2k} = 3\cdot j+1$. Silloin

$$\begin{aligned}2^{2(k+1)}-1 = 2^{2k+2}-1 = 2^{2k}\cdot 2^2-1 = (3\cdot j+1)\cdot 4-1 &= 12\cdot j+4-1\\ &= 12\cdot j+3 = (4\cdot j+1)\cdot 3,\end{aligned}$$

josta seuraa, että myös $2^{2(k+1)}-1$ on luvulla 3 jaollinen. Induktioperiaatteen nojalla pätee nyt, että väite pätee kaikilla $n \geq 1$.

---

2. Oleta, että $n \geq 2$ on kokonaisluku.

(a) Osoita binomikertoimen määritelmän avulla, että $\binom{2\cdot n}{2} = 2\cdot\binom{n}{2}+n^2$.

(b) Joukosta, jossa on $2\cdot n$ alkiota voidaan valita osajoukko, johon kuuluu 2 alkiota, $\binom{2\cdot n}{2}$:lla eri tavalla. Selitä minkälaisella päättelyllä vastaukseksi tulee $2\cdot\binom{n}{2}+n^2$ käyttämättä (a)-kohdan tulosta (jolloin siis (a)-kohta tulee todistetuksi toisella tavalla).

Ratkaisu: (a) Määritelmän mukaan

$$\binom{2\cdot n}{2} = \frac{2\cdot n\cdot(2\cdot n-1)}{2} = n\cdot(2\cdot n-1) = 2\cdot n^2-n,$$

ja

$$2\cdot\binom{n}{2}+n^2 2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+n^2 = n^2-n+n^2 = 2\cdot n^2-n,$$

joten väite pätee.

(b) Jos joukosta, jossa on $2\cdot n$ alkiota, pitää valita 2 alkiota voimme ensin jakaa joukon kahdeksi joukoksi A ja B siten, että $|A| = |B| = n$. Joukosta A voimme valita 2 alkiota $\binom{n}{2}$:lla eri tavalla ja samoin joukosta B. Lisäksi voimme valita yhden alkion joukosta A ja yhden joukosta B jolloin vaihtoehtojen lukumääräksi tulee $n\cdot n$. Koska nämä vaihtoehdot ovat toisiaan poissulkevia eikä muita ole niin vastaukseksi tulee $2\cdot\binom{n}{2}+n^2$.

---

3. Määritä lukujen 60 ja 46 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

Ratkaisu: Eukleideen algoritmin avulla saamme

$$\begin{aligned} 60 &= 1 \cdot 46 + 14, \\ 46 &= 3 \cdot 14 + 4, \\ 14 &= 3 \cdot 4 + 2, \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

ja tästä päättelemme, että suurin yhteinen tekijä on 2.

4.

(a) Selitä määritelmään nojautuen miksi oletuksista $f \in O(n)$ ja $g \in O(n^2)$ seuraa, että $f \cdot g \in O(n^4)$ ja miksi ei seuraa, että $\frac{g}{f} \in O(n)$.

(b) Ryhmä $[G, \circ]$ on joukon X permutaatioiden aliryhmä. Mistä nähdään, ettei funktio

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{6}\big(t_1^4 \cdot t_2^2 + 2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^3 + t_1^2 \cdot t_2 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_4\big),$$

ole ryhmän G sykli-indeksi $\zeta_{G,X}$?

(c) Ryhmän G sykli-indeksi toiminnassaan joukossa X on $\zeta_{G,X}(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\big(t_1^5 + 3 \cdot t_1 \cdot t_2^2\big)$. Monellako, ryhmän G toiminnan suhteen ei-ekvivalentilla tavalla voidaan joukon X alkioita värittää jos käytettävissä on 3 väriä?

Ratkaisu: (a) Jos $f \in O(n)$ niin on olemassa vakiot C_f ja N_f siten, että $|f(n)| \leq C_f \cdot n$ kun $n \geq N_f$. Samoin, jos $g \in O(n^2)$ niin on olemassa vakiot C_g ja N_g siten, että $|g(n)| \leq C_g \cdot n^2$ kun $n \geq N_g$. Lisäksi pätee $n^3 \leq n^4$ kun $n \geq 1$ joten oletuksista seuraa, että

$$|f(n) \cdot g(n)| \leq C_f \cdot c_g \cdot n \cdot n^2 \leq C_f \cdot C_g \cdot n^4,$$

kun $n \geq \max(N_f, N_g, 1)$. Määritelmän mukaan pätee siis $f \cdot g \in O(n^4)$.

Toisaalta, jos esimerkiksi $f(n) = 1$ ja $g(n) = n^2$ kun $n \in \mathbb{Z}$ niin $f \in O(n)$ ja $g \in O(n^2)$ mutta $\left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| = n^2 \notin O(n)$ koska $n^2 > Cn$ kun $n > C$ kaikilla $C > 0$.

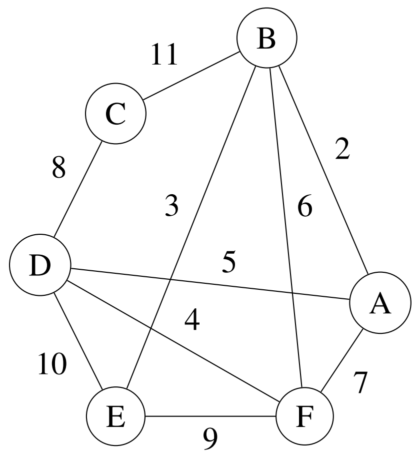
(b) $f(1,1,1,1) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 1 + 1) = \frac{5}{6}$ kun tuloksen pitäisi olla 1. Lisäksi termin $t_1^4 \cdot t_2^2$ nojalla joukon X alkioiden lukumäärä on $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8$ kun se taas termin $t_1^2 \cdot t_2 \cdot t_3$ nojalla on $1 \cdot 2 + 2 + 3 = 7$ ja termin $t_2 \cdot t_4$ nojalla $@ + 4 = 6$.

(c) Pólyan lauseen nojalla vaihtoehtojen lukumäärä on

$$\zeta_{G,X}(3,3) = \frac{1}{4}(3^5 + 3 \cdot 3 \cdot 3^2) = \frac{1}{4}(243 + 81) = \frac{324}{4} = 81.$$

---

5. Määritä alla olevan verkon $[V, E]$ minimaalinen virittävä puu käyttämällä algoritmia, joka takaa optimaalisen tuloksen (mutta sinun ei tarvitse osoittaa, että algoritmi antaa optimaalisen tuloksen). Selitä miten ole menetellyt esimerkiksi kirjoittamalla missä järjestyksessä olet lisännyt solmuja ja/tai kaareja.

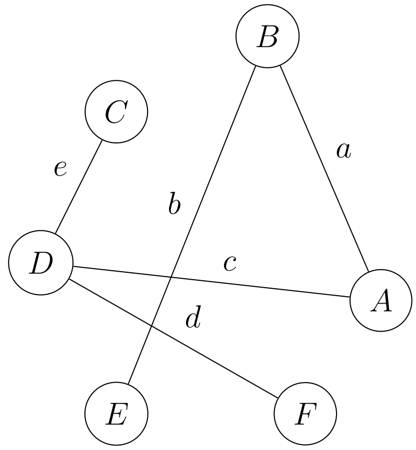


Kaarien painot ovat siis $w(\{A, B\}) = 2$, $w(\{B, C\}) = 11$, $w(\{C, D\}) = 8$, $w(\{D, E\}) = 10$, $w(\{E, F\}) = 9$, $w(\{A, D\}) = 5$, $w(\{A, F\}) = 7$, $w(\{B, E\}) = 3$, $w(\{B, F\}) = 6$ ja $w(\{D, F\}) = 4$.

Ratkaisu: Jos käytämme Primin ahnetta algoritmia niin aloitamme mielivaltaisella solmulla ja sitten lisäämme joka vaiheessa kaaren, jonka paino on mahdollisimman pieni, siten, että meillä on edelleen puu. Jos ensimmäiseksi solmuksi valitsemme A:n niin välivaiheet ovat seuraavat puut:

$$
\begin{aligned}
&[\{A\}, \emptyset], \\
&[\{A, B\}, \{\{A, B\}\}], \\
&[\{A, B, E\}, \{\{A, B\}, \{B, E\}\}], \\
&[\{A, B, D, E\}, \{\{A, B\}, \{B, E\}, \{A, D\}\}], \\
&[\{A, B, D, E, F\}, \{\{A, B\}, \{B, E\}, \{A, D\}, \{D, F\}\}], \\
&[\{A, B, C, D, E, F\}, \{\{A, B\}, \{B, E\}, \{A, D\}, \{B, F\}, \{D, C\}\}],
\end{aligned}
$$

ja puu näyttää seuraavanlaiselta (kaaret lisätty aakkosjärjetyskessä ja solmut järjestyksessä A, B, E, D, F ja C):



Kruskalin algoritmilla saamme saman virittävän puun mutta kaaret lisäämme seuraavassa järjestyksessä:

$$\{A, B\}, \{B, E\}, \{D, F\}, \{A, D\}, \{C, D\}.$$
