

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet  
Tentti ja välikokeiden uusinta 10.11.2015

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!  
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.  
Tentin tehtävät ovat 1, 3, 5, 6 ja 7.

Uusintavälikokeiden tehtävät ovat: 1. vk: 1–4, 2. vk: 5–8.

Vastauksissasi saa numeroiden lisäksi olla potensseja,  $\cdot$ ,  $+$ ,  $!$ ,  $(, )$  ja  $/$  mutta ei esimerkiksi binomikertoimia.

1. Osoita induktiolla että

$$2 + 6 + 12 + \dots + n(n-1) = \sum_{j=2}^n j(j-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}, \quad n \geq 2.$$

2. Relaatio  $W$  joukossa  $\mathbb{Z}$  on

$$W = \{ [m, n] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \exists k (k \in \mathbb{Z} \text{ AND } m = k^2 \cdot n) \}.$$

Mitkä ekvivalenssirelaation vaatimuksista (refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitivisyys) tämä relaatio toteuttaa? Perustele!

3.

- (a) Funktiot  $f : X \rightarrow Y$  ja  $g : Y \rightarrow Z$  ovat sellaisia, että yhdistetty funktio  $g \circ f : X \rightarrow Z$  on injektio. Onko  $f$  välttämättä injektio ja onko  $g$  välttämättä injektio? Perustele!
- (b) Joukossa  $A$  on 6 alkioita ja joukossa  $B$  on 10 alkioita. Montako injektiota  $f : A \rightarrow B$  on olemassa?

4.

- (a) Kolikko heitetään 10 kertaa ja tuloksista kirjataan kruunien ja klaavojen jono. Montako tällaista jonoa on, jossa on korkeintaan 4 kruunaa?
- (b) Varastohuoneessa on 6 hyllyä. Monellako tavalla voidaan sijoittaa 7 identtistä (ja hyvin pientä) laatikkoa hyllyille?

5. Lukujen 49 ja 17 suurin yhteinen tekijä on 1 koska Eukleideen algoritmin avulla saamme

$$49 = 2 \cdot 17 + 15,$$

$$17 = 1 \cdot 15 + 2,$$

$$15 = 7 \cdot 2 + 1,$$

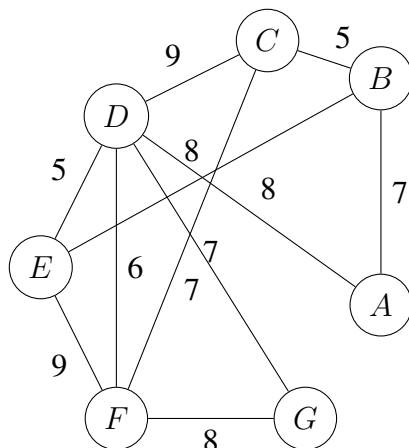
$$2 = 2 \cdot 1 + 0.$$

Määritä tämän laskun avulla  $[17]_{49}^{-1}$ .

6.

- (a) Joukko  $\{ [j]_8 : 1 \leq j \leq 7, \text{syt}(j, 8) = 1 \}$  jossa laskutoimituksena on jäännösluokkien kertolasku (modulo 8) on ryhmä. Onko tämä ryhmä syklinen? Perustele!
- (b) Mistä nähdään, että  $\zeta_{G,X}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6}(t_1^8 + 4t_1^2t_2^3 + 2t_3^2)$  ei voi olla ryhmän  $G$  sykli-indeksi sen toiminnassa joukossa  $X$ ?

7. Määritä alla olevan verkon minimaalinen virittävä puu käyttämällä algoritmia, joka varmasti antaa optimaalisen tuloksen (mutta sinun ei tarvitse osoittaa, että algoritmi antaa optimaalisen tuloksen). Selitä miten olet menetellyt, esimerkiksi kirjoittamalla missä järjestyksessä olet valinnut kaaret puuhun.



Kaarien painot ovat seuraavat:

$$\begin{array}{llll}
 w(\{A, B\}) = 7, & w(\{B, C\}) = 5, & w(\{C, D\}) = 9, & w(\{D, E\}) = 5, \\
 w(\{E, F\}) = 9, & w(\{F, G\}) = 8, & w(\{A, D\}) = 8, & w(\{B, E\}) = 8, \\
 w(\{C, F\}) = 7, & w(\{D, F\}) = 6, & w(\{D, G\}) = 7. & 
 \end{array}$$

8.

- (a) Osoita, että jos suuntaamattomassa verkossa  $[V, E]$  missä  $|V| = n$  jokaisen solmun naapureiden lukumäärä on suurempi kun  $\frac{n}{2}$ , niin verkko on yhtenäinen.
- (b) Määritä alla olevassa verkossa joko Eulerin polku tai Hamiltonin polku.

