Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet GG, EH, TH, PK, JT, LT, VÄ
Harjoitus 3
26–30.9.2016, viikko 39

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 3.10.2016 klo. 16.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Yhdistyksellä on hallitus, johon kuuluu seitsemän jäsentä: A, B, C, D, E, F ja G. Hallituksen jäsenistä on valittava puheenjohtaja, sihteeri ja varainhoitaja siten, että jokaisella valitulla on vain yksi tehtävä.

(a) Monellako tavalla tämän voi tehdä jos joko D:n tai E:n pitää olla puheenjohtaja?
(b) Monellako tavalla tämän voi tehdä jos B:n pitää tulla valituksi johonkin tehtävään?

Vastaus: (a) 60, (b) 90

P2. Kuntoilija valitsee 50 päivää vuoden kolmen viimeisen kuukauden aikana jolloin hän käy uimassa meressä mutta ei käy lenkillä, 20 päivää jolloin hän ei käy uimassa mutta juoksee 10 kilometrin lenkin ja muina päivinä hän käy sekä uimassa meressä että lenkillä. Monellako tavalla hän voi tehdä nämä valinnat?

(a) Esitä vastaus multinomikertoimena.
(b) Laske vastaus käyttäen tuloperiaatetta jolloin hän ensimmäisessä vaiheessa valitsee ne 50 päivää jolloin hän käy uimassa meressä mutta ei lenkillä ja sitten valitsee jäljella vapaana olevista päivistä ne jolloin hän ei käy uimassa mutta juoksee 10 kilometrin lenkin ja esitä vastaus binomikertoimien avulla.
(c) Osoita, että (a)- ja (b)-kohtien vastaukset ovat samat.

P3. Olkoot (x_j, y_j), $j = 1, 2, 3, 4, 5$ viisi pistettä tasossa siten, että kaikki koordinaatit x_j, y_j ovat kokonaislukuja. Miksi on mahdollista valita kaksi pistettä niin, että niitä yhdistävän janan keskipisteen molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja?
Vihje: Milloin kahden kokonaisluvun keskiarvo on kokonaisluku ja miksi tämä ei aina ole mahdollista jos pisteitä on vain 4?

P4. Joukossa X on n alkiota. Relaatio W joukossa X on antisymmetrinen jos $[x, y] \in W$ AND $x \neq y \rightarrow [y, x] \notin W$ eli $[x, y] \in W$ AND $[y, x] \in W \rightarrow x = y$ kaikilla x ja $y \in X$. Esimerkiksi relaatio $\leq$ (mutta myös $<$) on antisymmetrinen $\mathbb{R}$:n osajoukossa. Päättele montako antisymmetristä relaatiota W joukossa X on olemassa, esimerkiksi vastaamalla ensin seuraaviin kysymyksiin missä oletetaan, että $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

(a) Jos W on antisymmetrinen niin montako vaihtoehtoa on kun tarkastellaan onko pari $[x_i, x_i]$ relaation W alkio?
(b) Jos $1 \leq i < j \leq n$ ja W on antisymmetrinen, niin montako vaihtoehtoa on kun tarkastellaan ovatko parit $[x_i, x_j]$ ja/tai $[x_j, x_i]$ relaation W alkioita.
(c) Montako kokonaislukuparia $[i, j]$ löytyy siten, että $1 \leq i < j \leq n$?
(d) Laske antisymmetristen relaatioiden lukumäärä (a)-, (b)- ja (c)-kohtien tulosten sekä tuloperiaatteen avulla.

P5.

(a) Jos kirjoitat tekstin käyttäen merkistön, johon kuuluu n merkkiä niin montako tekstiä, joiden pituus on m merkkiä on olemassa?

(b) Olkoon T joukko, johon kuuluvat kaikki tietyllä äärellisellä merkistöllä kirjoitetut ärelliset tekstit. Miksi T on numeroituva eli esitä (lyhyesti) miten voit järjestää T:n alkiot jonoon jolloin saat bijektion $f : \mathbb{N}_0 \to T$.

(c) Oleta, että on olemassa surjektio $h : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ (missä siis $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ on joukko johon kuuluvat täsmälleen kaikki funktiot $\mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$) ja johda tästä ristiriita konstruoimalla funktio $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ siten, että $f \neq h(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$ eli siten, että kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$ on olemassa ainakin yksi $k \in \mathbb{N}_0$ (mutta mikä!) siten, että $f(k) \neq h(n)(k)$. (Kun olet osoittanut ettei löydy surjektiota $h : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ olet myös osoittanut, että $|\mathbb{N}_0| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}|$.)

(d) Jos ”säännön” määritelmäksi otetaan, että on olemassa äärellinen merkistö siten että jokaiselle ”säännölle” on olemassa oma selitys, joka on esitettävissä äärellisenä tekstinä tällä merkistöllä niin onko silloin (b) ja (c) kohdan nojalla järkevää sanoa, että ”funktio on sääntö”?